J. Grumann

1973.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523706_0030

Zur Theorie des kollektiven Hamilton-Operators in Atomkernen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Jens Grumann
aus Bremen

Frankfurt am Main
Februar 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang-Goethe Universität Frankfurt am Main

Dekan:	Prof. W. Jung
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. W. Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 28. 4. 73

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		3
I	Die kinetische und potentielle Energiefläche	5
II	Mikroskopische Bestimmung von $T(\dot{\alpha}, \alpha)$ und $V(\alpha)$	1o
III	Der Schalenmodellansatz	12
IV	Störungsrechnung	16
V	Der Zusammenhang der Potentialparameter $\tilde{\varepsilon}$ mit den Oberflächenkoordinaten $\tilde{\alpha}$	2o
VI	Der Grundzustandserwartungswert	25
VII	Bestimmung der kollektiven Energiefläche	3o
VIII	Vergleich mit Berechnungen der kollektiven Energie im Cranking-Modell	33
IX	Numerische Durchführung für Erbium	39
X	Zusammenfassung	5o

Anhänge

A,I	Transformation der Hamilton-Funktion von dem Laborsystem in das körperfeste Bezugssystem	52
A,II	Die kollektive Hamilton-Funktion in der kanonisch-konjugierten Darstellung	55
B,I	Der Schalenmodellansatz	57
B,II	Die Matrixelemente der Quadrupoloperatoren in den Eigenfunktionen des anisotropen, harmonischen Oszillators in Zylinderkoordinaten	6o
B,III	Diagonalisierung der Paarrestwechselwirkung	62
B,IV	Transformation der Matrixelemente im BCS-Formalismus in Matrixelemente von Einteilchenfunktionen	65
C	Die Grundzustandswellenfunktion in 3. Ordnung Störungsrechnung als Funktion der Deformationsparameter des Potentials	66
D,I	Transformation der Potentialparameter in die Quadrupolparameter	68
D,II	Transformation der Quadrupolparameter in die Oberflächenparameter der Radiusentwicklung	7o
D,III	Transformation der statischen Deformationsparameter des Potentials in die der Oberfläche	72

E,I Die Massen- und Potentialfunktionen der Grundzustandserwartungswerte 74

E,II Der Grundzustandserwartungswert in der Oberflächendarstellung 82

F Die Massen- und Potentialpolynome der kollektiven Hamilton-Funktion 85

Literaturverzeichnis 87

Tabelle 89

Figurenbeschreibung und Figuren 91

Einleitung

Mit dieser Arbeit soll dazu beigetragen werden, die Dynamik der Kerne mit gerader Anzahl von Protonen und Neutronen besser zu verstehen. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Spektren schwerer Kerne eine Anzahl von Zuständen zeigen, deren Energie, Übergangswahrscheinlichkeiten und Quadrupolmomente nur durch die kohärente Anregung vieler Nukleonen erklärt werden können. Da diese Zustände den niederenergetischen Bereich der Spektren wesentlich bestimmen, können wegen des Pauli-Prinzipes nur die Nukleonen in der Nähe der Fermikante an diesen Anregungen beteiligt sein. Durch deren Dichteverteilung wird die Oberfläche des Kernes bestimmt, und deshalb liegt es nahe, durch einen Modellansatz die Anzahl der Freiheitsgrade des Kernes (N-Teilchen-System) auf einige wenige "kollektive" Variablen zu beschränken, die die Änderungen der Kerngestalt beschreiben.

Dieser Gedankengang wurde von Bohr und Mottelson 1), 2) in dem Kollektivmodell zum ersten Mal aufgegriffen. Einige Weiterentwicklungen dieses Modelles haben sich auf die Untersuchung der kollektiven Potentialenergiefläche konzentriert, die es ermöglicht, anschaulich die Veränderungen der Kerngestalt mit den kollektiven Spektren zu verbinden. So gelang es mit Schalenmodellansätzen, die Grundzustandsdeformation und die Höhe und Form der Spaltschwelle zu beschreiben 21), während mit allgemeinen Ansätzen der kollektiven Hamilton-Funktion die Struktur der kollektiven Niveaus erklärt werden kann 6).

Hier soll versucht werden, die Verbindung zwischen diesen beiden Wegen herzustellen, indem mit Schalenmodellansätzen die Dynamik der kollektiven Energie berechnet wird, und daraus die Entwicklungskoeffizienten der kollektiven Hamilton-Funktion bestimmt werden.

Im Folgenden wird auf den hier verwendeten Ansatz der kollektiven Hamilton-Funktion eingegangen, der in der kinetischen Energie alle

Terme bis zu 4. Ordnung und in der potentiellen Energie alle Terme bis zu 6. Ordnung enthält. Bei der mikroskopischen Berechnung der kollektiven Grundzustandsenergie werden zwei ähnliche Schalenmodellansätze untersucht, deren zeitabhängige Anteile in einer Störungsrechnung konsistent bis zu 4. Ordnung berücksichtigt werden. Da die kollektiven Koordinaten vom Konzept her eng mit der Dichteverteilung des Kernes verbunden sind, die Schalenmodellansätze aber primär von der Form des Einteilchenpotentials ausgehen, werden für die kollektiven Koordinaten zwei Darstellungen verwendet, die dem Rechnung tragen.

Bei der numerischen Durchführung wird die kollektive Energie des Grundzustandes von $_{68}Er^{98}$ berechnet. Mit den daraus gewonnenen kernspezifischen Konstanten der Hamilton-Funktion werden die berechneten Spektren mit den gemessenen Niveaus verglichen. Da in dieser Arbeit die Rechnungen konsistent bis zu 4. Ordnung durchgeführt werden, sind die analytischen Ausdrücke zum Teil sehr umfangreich und werden deshalb soweit wie möglich in den Anhängen angegeben.

I Die kinetische und potentielle Energiefläche

Die kollektiven, niederenergetischen Eigenschaften von Atomkernen mit gerader Protonen- und Neutronenanzahl lassen sich (Bohr und Mottelson 1), 2)) durch Oberflächenschwingungen erklären. Im Laborsystem wird die Kernoberfläche durch

(I,1)

$$R(\vartheta,\varphi) = R_0\left[1 + \sum_\mu \alpha_\mu^* Y_{2\mu}(\vartheta\varphi)\right]$$

$$R_0 = 1.2\, A^{1/3}\ [fm] \qquad \alpha_\mu^* = (-)^\mu \alpha_{-\mu}$$

beschrieben. Die Beschränkung in (I,1) auf Quadrupoloberflächen hat folgende Gründe. Es zeigt sich, daß höhere Multipole erst bei großen Deformationen - d.h. jenseits der Spaltschwelle, wo der Kern irreversibel spaltet - einen wesentlichen Einfluß haben. Dies wird durch die Untersuchungen der Grundzustandsgestalt, der Stabilität, der Höhe und der Form der Spaltbarriere von R. Fraser 3) (für Oktupole) und S. G. Nilsson 4) (für Hexadekupole) nahegelegt. Man findet ebenso in vielen kollektiven Spektren von g-g-Kernen, daß die Zustände mit negativer Parität - 1-Zustände, die durch Oktupolschwingungen beschrieben werden können - bei rund 1MeV Anregungsenergie liegen. Man kann daraus schliessen, daß die Oktupoldeformationen die Zustände gerader Parität nahe am Grundzustand wenig beeinflussen.

Diese Beispiele lassen zwar nicht den Schluß zu, daß die Einflüsse der höheren Multipolschwingungen auf die Kerne vollständig unerheblich sind, aber mit den Quadrupolschwingungen lassen sich viele kollektive Eigenschaften, insbesondere die Grundzustandsbanden von g-g-Kernen, gut beschreiben.

Ein anderer Grund für die Beschränkung auf die Quadrupolfreiheitsgrade liegt darin, daß durch kompliziertere Schwingungen der Kernoberfläche die Anschaulichkeit des Modelles weitgehend verloren geht. Denn fügt man z.B. noch die Oktupolschwingungen hinzu, dann wird das Modell um 7 Freiheitsgrade und den dazugehörenden charakteristischen Modellgrößen erweitert.

Die fünf zeitabhängigen Koordinaten $\alpha_\mu(t)$ bestimmen die Kernform und die Lage des Kernes im Raum, sie beschreiben sowohl Schwingungen als auch Rotationen. In diesen Koordinaten hat die kollektive Hamilton-Funktion des Kernes im Laborsystem die Struktur

(I,2)

Die analytische Form der Entwicklung von (I,2) ist weitgehend bestimmt durch den Tensorcharakter der Koordinaten $a_\mu(t)$ (Komponenten des Tensors 2. Stufe) und durch die Erhaltung der folgenden Größen: dem Drehimpuls (Rotationsvarianz), der Parität (Raumspiegelung) und der Zeitumkehr (gerade Anzahl der $\dot{a}_\mu$ bzw. deren kanonisch konjugierten Impulsen in der kinetischen Energie). Deshalb hat die kinetische Energie $T(\dot{a}_\mu, a)$ die Form:

(I,3a)

$$T(\dot{a}_\mu, a_\mu) = \mathcal{B}_2 [\hat{\dot{a}} \times \hat{\dot{a}}]^\circ + \mathcal{B}_3 [\hat{\dot{a}} \times \hat{a} \times \hat{\dot{a}}]^\circ + \sum_j \mathcal{B}_{4j} \tfrac{1}{2} \{ [[\hat{\dot{a}} \times \hat{a}]' \times [\hat{a} \times \hat{\dot{a}}]']^\circ + [[\hat{\dot{a}} \times \hat{a}]' \times [\hat{a} \times \hat{\dot{a}}]]^\circ \} + \mathcal{B}_5 [[\hat{\dot{a}} \times \hat{a}]^\circ \times [\hat{a} \times \hat{\dot{a}}]^\circ]^\circ + \cdots$$

die potentielle Energie

(I,3b)

$$V(a_\mu) = C_2 [\hat{a} \times \hat{a}]^\circ + C_3 [\hat{a} \times \hat{a} \times \hat{a}]^\circ + C_4 [[\hat{a} \times \hat{a}]^\circ \times [a \times a]^\circ]^\circ + C_5 [[\hat{a} \times \hat{a}]^\circ \times [\hat{a} \times \hat{a} \times \hat{a}]^\circ]^\circ + C_6 [[\hat{a} \times \hat{a} \times \hat{a}]^\circ \times [\hat{a} \times \hat{a} \times \hat{a}]^\circ]^\circ + \mathcal{D}_6 [[\hat{a} \times \hat{a}]^\circ \times [\hat{a} \times \hat{a}]^\circ \times [\hat{a} \times \hat{a}]^\circ]^\circ + \cdots$$

wobei die folgenden Abkürzungen benutzt wurden:

$\hat{a}$ ist der Tensor 2. Stufe mit den Komponenten a_μ.

(I,3c)

$$[\hat{a} \times \hat{a}]^\lambda \equiv [a_{\mu_1}^{\lambda_1} \times a_{\mu_2}^{\lambda_2}]_\mu^\lambda = \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda} \, a_{\mu_1}^{\lambda_1} a_{\mu_2}^{\lambda_2}$$

Die $C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda}$ sind Clebsch-Gordan-Koeffizienten und wie aus (I,3c) ersichtlich, wurden bei den Komponenten a_μ^λ die Indices des Drehimpulses ($\lambda = 2$) weggelassen.

Die Entwicklungskoeffizienten B_{ij} und C_{ij} sind Konstanten, die die speziellen Eigenschaften des betrachteten Kernes beschreiben. Eine ausführliche Begründung dieses Ansatzes (I,3) der kollektiven Hamiltonfunktion findet man u.a. in dem ersten Band von Greiner-Eisenberg 5), der Dissertation von Gneuß 6) und der Diplomarbeit von Urbas 7). Bei der Entwicklung der H-Funktion (I,2) wurden alle Terme bis zur vierten Ordnung in (I,3) angegeben. Dabei fällt in der kinetischen Energie der letzte Term durch seine ungewöhnliche Struktur auf. Zur Deutung dieses Termes werden die höheren Ordnungen der Entwicklung von (I,3a) betrachtet. In einer schematischen Darstellung erhält man für die Komponenten $a(t)$, $\dot{a}_\mu(t)$ der Tensoren $\hat{a}$ und $\hat{\dot{a}}$:

$$
\begin{aligned}
T(\dot{\alpha},\alpha) = {} & M_2\left[K_{20} + K_{30}\alpha + K_{41}\alpha\alpha + \cdots\right]\dot{\alpha}\dot{\alpha} \\
& + M_4\left[L_{40} + L_{51}\alpha + L_{62}\alpha\alpha + \cdots\right]\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha} \\
& + M_6\left[J_{60} + J_{71}\alpha + J_{82}\alpha\alpha + \cdots\right]\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\alpha} \\
& + \cdots
\end{aligned}
\qquad \text{(I,4)}
$$

Man erhält also bei dieser Wahl der kollektiven Koordinaten (I,1) bei der kinetischen Energie nicht nur Terme, die proportional zu $\dot{\alpha}\dot{\alpha}$ sind, sondern alle Terme der Art $(\dot{\alpha}\dot{\alpha})^{2n}$ (n = 1,2,...), wobei jedem Term der Klasse n ein deformationsabhängiger Massenfaktor zugeordnet ist.

Um die physikalische Bedeutung dieser höheren kinetischen Terme besser verstehen zu können, ist es nützlich, Untersuchungen des Kollektivmodells im klassischen Tröpfchenmodell zu betrachten. Dort werden gewöhnlich nur diejenigen kinetischen Terme behandelt, die proportional zu $\dot{\alpha}\dot{\alpha}$ sind. Das hat seine Ursache darin, daß in diesen Modellen die hydrodynamischen Gleichungen durch die explizite Annahme einer wirbelfreien, inkompressiblen Flüssigkeit (Potentialströmung) berechnet werden. Läßt man dagegen Wirbel der Flüssigkeit zu, dann müssen geschwindigkeitsabhängige Potentiale zugelassen werden. Man erhält dann nicht-lineare Bewegungsgleichungen, die die in (I,4) schematisch angegebenen höheren Klassen der kinetischen Energie beinhalten 8). Da bei der Entwicklung der kollektiven Hamilton-Funktion (I,2) neben der Erhaltung des Drehimpulses, der Parität und der Zeitumkehr keine weiteren Randbedingungen benutzt wurden, ist es plausibel, daß auch in der Entwicklung (I,3) die nicht-linearen Anteile der Hamilton-Funktion erscheinen. Es ist eines der Ziele dieser Arbeit, den Einfluß dieser Effekte am Beispiel des Termes $\hat{\mathcal{D}}_5\left[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^{\bullet}\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^{\bullet}\right]^{\bullet}$ zu untersuchen.

Es soll hier darauf hingewiesen werden, daß die Struktur der Entwicklung (I,3) nicht von der speziellen Annahme der Quadrupoloberfläche abhängt, sondern nur die mathematischen Eigenschaften der Quadrupoltensoren entscheidend sind. Dies zeigt sich unter anderem darin, daß die Eigenfunktionen und Eigenwerte des aus (I,3) gebildeten Hamilton-Operators unabhängig von der anschaulichen Bedeutung der α_μ-Komponenten sind, wohl aber andere charakteristische kollektive

Größen der Kerne, wie die Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten und der statischen Kerndeformation. Dieser Umstand wird später dazu benutzt, um die α_μ-Komponenten mit der Deformation eines Einteilchenpotentials und diejenigen der Kernoberfläche zu identifizieren.

Man bezeichnet in $H(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ als Potential-Energiefläche PES die potentielle Energie $V(\alpha_\mu)$, und als die Kinetische-Energiefläche die kinetische Energie $T(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$. Es wird im folgenden Kapitel gezeigt, daß sich die physikalisch interessanten Informationen der Flächen in dem mitbewegten Hauptachsenbezugssystem als Funktionen zweier Schwingungsvariablen darstellen lassen, und damit eine übersichtliche Deutung der Kerneigenschaften im Rahmen dieses Modelles möglich ist.

Es ist offenbar, daß in der Entwicklung (I,3) alle Informationen über einen speziellen Kern in den Konstanten B_i und C_i enthalten sind. Um diese zu bestimmen, gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Zum Einen kann man versuchen, die Konstanten des zu (I,3) gehörenden Hamilton-Operators durch Anpassen der Spektren und Übergangswahrscheinlichkeiten aus den Experimenten festzulegen. Dieses Verfahren wird sehr intensiv durchgeführt 9), und die Erfolge lassen den Schluß zu, daß mit dieser Methode bei fast allen kollektiven Kernen das Niederenergiespektrum positiver Parität und die dazu gehörenden Übergangswahrscheinlichkeiten gut reproduziert werden. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß es nicht zuverlässig gelingt, die Werte der Konstanten zu systematisieren, und man ist deshalb gezwungen, diese für jeden Kern anzupassen. Der zweite Weg, bei dem die Konstanten von (I,3) mit einem Einteilchenmodell berechnet werden, vermeidet diese Schwierigkeiten. Dafür ergeben sich hierbei zum Teil erhebliche mathematische Probleme, die darin begründet sind, daß man bei Einteilchenmodellen aus den 5N - Freiheitsgraden der Nukleonen die wenigen Kollektiven des Kernes "destillieren" muß. Es wurde eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten ausgearbeitet, die hier nach den verwendeten Verfahren aufgezählt werden:

die Methode der "Generator Koordinaten" 1o), der "Projektion der kollektiven Wellenfunktionen" 11), der "Bosonen-Entwicklung (RPA)" 12), der "zeitabhängigen Hartree-Fock-Bogolyubov Theorie (TDHFB)" 13), und der "phänomenologischen Ansätze" 5), 13), 15), 3o).

Da in dieser Arbeit kollektive Eigenschaften von mittleren bis schweren Kernen untersucht werden sollen, wurde die zuletzt genannte Möglichkeit verwendet.

II Mikroskopische Bestimmungen von $T(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ und $V(\alpha_\mu)$

Der Ansatz (I,3) beschreibt mit den fünf Koordinaten $\alpha_\mu(t)$ die Rotationen und Schwingungen des Kernes im Laborsystem. Um bei deformierten Kernen die KES und die PES unmittelbar aus dem Schalenmodell bestimmen zu können, ist es vorteilhaft, die beiden Bewegungsformen so weit wie möglich zu trennen. Dies geschieht, wenn aus dem Laborsystem in ein mitbewegtes Bezugssystem ($\tilde{a}_\mu(t)$) transformiert wird, das mit den Hauptachsen des Kernellipsoides zusammenfällt und in dem der Kernrand die Gestalt hat $R = R_0[1 + \sum_\mu \tilde{a}_\mu Y_{2\mu}]$
Ein solches Bezugssystem wird durch

(II,1) $$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_{-1} = 0 \; ; \quad \tilde{a}_2 = \tilde{a}_{-2}$$

festgelegt, wobei der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $\alpha_\mu(t)$ und $a_\mu(t)$ durch die Drehmatrizen $D^2_{\mu\nu}$ bestimmt ist.

(II,2) $$\tilde{a}_\nu = \sum_\mu \alpha_\mu D^2_{\mu\nu}(\Theta_i)$$

Wir erhalten jetzt statt der fünf Deformationskoordinaten $\alpha_\mu(t)$ die drei Eulerwinkel Θ_i und die Schwingungskoordinaten $a_0(t)$ und $a_2(t)$ als unabhängige Variable.

Führt man die Transformation (II,2) in $H(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ durch und bricht man die Entwicklung wie in (I,3) bei Termen 4. Ordnung ab, dann erhält man für das Potential $V(\alpha_\mu)$

(II,3) $$V(\alpha_\mu, C_i) \longrightarrow V(\tilde{a}_\nu, C_i)$$

Die Transformation verändert nicht die mathematische Struktur des Potentials, da alle Tensoren zu Skalaren zusammengekoppelt sind. Man kann formal die im Laborsystem definierten fünf Deformationskoordinaten α_μ durch die Schwingungsvariablen $\tilde{a}_\nu$ - die Kollektivkoordinaten - ersetzen; die Konstanten C_i bleiben unverändert. Die kinetische Energie spaltet in einen Rotations- und einen Vibrationsanteil auf.

$$T(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu, \mathcal{B}_\varepsilon) \rightarrow T^1_{rot} + T^2_{rot} + T^1_{vib} + T^2_{vib}$$

(II,4)

$$T^1_{rot} = \sum_{\varkappa=1}^{3} J_\varkappa(\dot{\tilde{a}}_\nu, \tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_\varepsilon)\, \omega^2_\varkappa$$

$$T^2_{rot} = \sum_{\varkappa=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} I_{\varkappa\varrho}(\tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_5)\, \omega^2_\varkappa\, \omega^2_\varrho$$

$$T^1_{vib} = \sum_{\mu\nu} M_{\mu\nu}(\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_\varepsilon)\, \dot{\tilde{a}}_\mu\, \dot{\tilde{a}}_\nu$$

$$T^2_{vib} = \sum_{\mu\nu} N_{\mu\nu}(\mathcal{B}_5)\, \dot{\tilde{a}}_\mu\, \dot{\tilde{a}}_\mu\, \dot{\tilde{a}}_\nu\, \dot{\tilde{a}}_\nu$$

Diese formale Aufteilung der gesamten kinetischen Energie ist nur bei deformierten Kernen sinnvoll, da in den Rotationsanteilen T^1_{rot} und T^2_{rot} über die explizite Abhängigkeit der Trägheitsmomente $J_\varkappa$ und $I_{\varkappa\varrho}$ von den Schwingungsvariablen $\tilde{a}_\nu$ eine Rotations-Vibrations-Wechselwirkung enthalten ist, die bei sphärischen Kernen so stark wird, daß eine Unterteilung der kinetischen Energie in einen Anteil der Rotation und einen der Vibration physikalisch bedeutungslos wird. In dem Vibrationsanteil T^1_{vib} und T^2_{vib} dagegen sind die Massenfunktionen $M_{\mu\nu}$ und $N_{\mu\nu}$ nur von den Kollektivvariablen $\tilde{a}_\nu$ abhängig. Die explizite Form von (II,3) und (II,4) ist im Anhang A angegeben.

Um die kollektiven Flächen der kinetischen und der potentiellen Energie mikroskopisch berechnen zu können, wird die Kopplung zwischen der Einteilchenbewegung und der Kollektivbewegung vernachlässigt (Adiabasieannahme). Somit gehen die Kollektivkoordinaten $\tilde{a}_\nu$ nur als Parameter in die Wellenfunktionen und Energien des Schalenmodelles ein. Diese Annahme bewährt sich, wenn die Anregungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Nukleonen klein gegenüber der Kollektivbewegung sind; dann kann man $T(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ und $V(\alpha_\mu)$ auf der Basis eines Schalenmodelles berechnen.

III Der Schalenmodellansatz

Um die kernspezifischen Konstanten B_{ij} und C_{ij} der Flächen $T(\dot{a}_\nu, a_\nu)$ und $V(a_\nu)$ bestimmen zu können, muß die Energie des Kernes als Funktion seiner Deformation und der zeitlichen Änderung der Deformation aus einem mikroskopischen Modell bestimmt werden. Hat man zum Beispiel den Grundzustandserwartungswert eines Kernes als eine solche Funktion vorliegen, dann erhält man, unter Beachtung der von der kollektiven H-Funktion vorgegebenen funktionalen Struktur (Anhang A), durch Koeffizientenvergleich die gesuchten Konstanten B_{ij} und C_{ij} der Flächen.

Im Weiteren wird für das Einteilchenmodell der Ansatz einer modifizierten Quadrupol-Quadrupol-Kraft mit der Paarkraft als Restwechselwirkung benutzt 15), 16). Unter den verschiedenen Modellansätzen wurde dieser ausgewählt, weil hiermit die beiden wichtigsten Effekte der Kernstruktur, nämlich die Paareffekte und Quadrupoldeformationen, relativ einfach beschrieben werden können. Andere "realistische" Kräfte sind meist mathematisch und/oder numerisch sehr aufwendig, und, obwohl sie sich in der Form oft stark von der Q-Q-Kraft mit der Paarkraft unterscheiden, enthalten auch sie die Paareffekte und Deformation der Kerne.

Im Laborsystem wird für das Schalenmodell der Ansatz

(III,1) $$H^I = H_{\text{Oszillator}} + H_{\text{Paar}} + H^I_{QQ}$$

gemacht. Dabei wird von einem sphärischen Oszillatoransatz mit den üblichen Drehimpulskorrekturen ausgegangen 17).

(III,1a) $$H_{\text{Osz}} = \sum_i \left[T_i + \frac{m}{2}\omega^2 r_i^2 + C\,\vec{\ell}_i \cdot \vec{s}_i + D(\vec{\ell}_i^{\,2} - \langle \vec{\ell}^{\,2} \rangle_N) \right]$$

Als Restwechselwirkung wird die Paarkraft H_{Paar} in der BCS-Näherung 16) benutzt, und es wird angenommen, daß die Q-Q-Kraft das deformierte Feld erzeugt.

(III,1b) $$H^I_{QQ} = -\tfrac{1}{2}\chi \sum_\mu{}' Q^+_\mu Q_\mu \quad ; \quad Q_\mu = \sum_i r_i^2 Y_{2\mu}(\Theta_i \varphi_i)$$

Der Versuch, aus den Eigenwerten und Eigenfunktionen dieses H-Operators kollektive Eigenschaften des Kernes abzuleiten, bereitet erhebliche Schwierigkeiten und ist für schwere Kerne bisher nicht befriedigend gelungen. Deshalb wird in dieser Arbeit die Deformation der Kerne nicht konsistent als Folge der Q-Q-Kraft hergeleitet, sondern sie wird als gegeben angesehen. Dies geschieht dadurch, daß die Q-Q-Kraft durch das von ihr erzeugte mittlere deformierte Feld ersetzt wird.

(III,2) $$H^{II} = H_{Nilsson} + H_{Paar} + H^{II}_{qq}$$

Dieser H-Operator ist geeignet, die kollektiven Eigenschaften in adiabatischer Näherung zu beschreiben, indem man davon ausgeht, daß sich die einzelnen Nukleonen in dem gemittelten nichtsphärischen Feld bewegen. Die kollektiven Rotationen und/oder Vibrationen werden durch die zeitlichen Änderungen dieses Feldes erzeugt. Für den Nilssonansatz wird die von Gustavson 18) angegebene Form benutzt.

(III,2a) $$H_{Nilsson} = T + \frac{m}{2}\sum_i \left[\omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2\right] + C\sum_i \vec{l}_i \vec{s}_i + D\sum_i \left[\vec{l}_i^{\,2} - \langle \vec{l}^{\,2}\rangle\right]$$

Die geometrische Form des Oszillatorpotentials und damit die statische Deformation des Kernes wird durch die unterschiedlichen Frequenzen ω_i bestimmt. Dabei hat es sich als nützlich erwiesen, die Äquipotentialflächen, welche im Falle von $H_{Nilsson}$ immer Ellipsoide sind, durch zwei Deformationsparameter $\bar{\varepsilon}_0$ und $\bar{\varepsilon}_2$ zu parametrisieren. Für die Paarrestwechselwirkung gilt in der Darstellung der zweiten Quantisierung:

(III,2b) $$H_{Paar} = -\frac{1}{4} G \sum_{\mu\nu} c_\mu^+ c_{\bar{\mu}}^+ c_{\bar{\nu}} c_\nu$$

Die $c_{\bar{\mu}}^+$ sind die zeitinversen Teilchenoperatoren zu c_μ^+, die als Erzeugungsoperatoren den Eigenfunktionen von $H_{Nilsson}$ entsprechen. Der zeitabhängige Anteil des Q-Q-Feldes verbleibt in

(III,2c) $$H^{II}_{qq} = -\tfrac{1}{2}\chi' \sum_\mu \hat{Q}_\mu^+ \hat{Q}_\mu$$

Da im Nilssonansatz bereits der Hauptteil der felderzeugenden Nukleon-Nukleon-Kraft enthalten ist, wirken in H_{QQ}^{II} nicht die vollständigen Quadrupoloperatoren (III,1b) sondern

(III,2d)
$$\hat{Q}_\mu = \sum_i r_i^2 Y_{2\mu}(\Theta_i \varphi_i) - \langle 0_{BCS} | r_i^2 Y_{2\mu}(\Theta_i \varphi_i) | 0_{BCS} \rangle$$

Es wird also der statische Anteil des Q-Operators mit dem Erwartungswert herausgezogen ($|0_{BCS}\rangle$ ist die Grundzustandsfunktion von $H_{Nilsson} + H_{Paar}$).

Der Operator H^{II} enthält wie H^{I} eine Zweikörperkraft, und deshalb entstehen bei dieser Lösung bezüglich der kollektiven Kerneigenschaften die gleichen Schwierigkeiten. Um die zeitlichen Schwankungen des Einteilchenfeldes mit einer Störungsrechnung erfassen zu können, wird in H_{QQ}^{II} nunmehr ein mittleres zeitabhängiges Feld abgespalten.

(III,3)
$$-\tfrac{1}{2}\chi' \sum_\mu \hat{Q}_\mu^+ \hat{Q}_\mu \longrightarrow -\chi' g \sum_\mu \varepsilon_\mu(t)\, \hat{Q}_\mu$$

Die Konstante g wird eingeführt, um die zeitabhängige Deformationsfunktion $\varepsilon_\mu(t)$ dimensionslos zu machen. Der H-Operator, der in zeitabhängiger Störungsrechnung gelöst wird, lautet nun

(III,4)
$$H^{III} = H_{def} + H_Q$$

wobei

(III,4a)
$$H_{def} = H_{Nilsson} + H_{Paar}$$

$$H_Q = -\chi \sum_\mu \varepsilon_\mu(t)\, \hat{Q}_\mu \quad ; \quad \chi \equiv \chi' g$$

Wählt man den Dimensionsfaktor g geeignet (Näheres dazu im Anhang B), dann kann man die Parameterfunktion $\tilde{\varepsilon}_\mu(t)$ definieren, die die gesamte Deformation der Äquipotentialflächen von H^{III} beschreibt.

(III,5)
$$\tilde{\varepsilon}_\mu(t) = \bar{\varepsilon}_\mu + \varepsilon_\mu(t)$$

Diese Funktion faßt die statische Deformation $\bar{\varepsilon}_\mu$ des Nilsson-Ansatzes und die zeitliche Änderung $\varepsilon_\mu(t)$ des Störterms H_Q zu einem einheitlichen Deformationsparameter zusammen.

Die Diagonalisierung von $H_{Nilsson} + H_{Paar}$ ist im Anhang B angegeben, und die Näherungslösungen des H-Operators (III,4) werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

IV Störungsrechnung

Im Folgenden wird angenommen, daß ψ_m die Eigenfunktionen und $\mathcal{E}_m$ die Eigenwerte des vollständigen Hamilton-Operators (III,4) sind.

(IV,1)
$$H^{III}\,\psi_m = \mathcal{E}_m\,\psi_m$$

Unser Ziel, den Grundzustand ψ_0 in einer analytischen Form zu erhalten, erreichen wir mit dem Formalismus der zeitabhängigen Störungsrechnung. Als Basis dieser Entwicklung werden die Eigenfunktionen φ_j [§] und die Eigenwerte E_j von H_{def} (III,4a) verwendet. (Einzelheiten der Diagonalisierung von H_{def} sind im Anhang B angegeben.) Es gilt also

(IV,2)
$$H_{def}\,\varphi_j = E_j\,\varphi_j$$

Für den Grundzustand ψ_0 von H^{III} wählen wir den Ansatz

(IV,3)
$$\psi_0 = \sum_j \tilde{c}_j(t)\,\varphi_j\,\exp\left[\frac{E_j}{i\hbar}t\right]$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $\tilde{c}_j$ implizit über die kollektiven Deformationsparameter $\varepsilon_\mu(t)$ von der Zeit abhängen. Die Schrödingergleichung in der Wechselwirkungsdarstellung lautet dann

(IV,4)
$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\tilde{c}_m = \sum_j \tilde{c}_j\,\langle m|H^{III}_{WW}|j\rangle\,\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_m - E_j)t\right]$$

Da in diesem System gekoppelter Differentialgleichungen die Terme mit j = m nicht mehr oszillatorisch von der Zeit abhängen ($\langle m|H^{III}_{WW}|j\rangle$ hängt noch implizit von der Zeit ab) und dadurch die Struktur des gesamten DGl-Systems stören, werden diese Terme durch eine unitäre Transformation der Entwicklungskoeffizienten $\tilde{c}_j$ beseitigt 19).

(IV,5)
$$\tilde{c}_m = c_m\,\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \langle m|H^{III}_{WW}|m\rangle\,dt'\right]$$

Man erhält die transformierte Schrödingergleichung

(IV,6)
$$i\hbar\,\frac{d}{dt}\,c_m = \sum_{j\neq m} c_j\,\langle m|H^{III}_{WW}|j\rangle\,\exp[i\,\omega_{mj}\,t]$$

$$i\,\omega_{mj}\,t = \frac{i}{\hbar}\left[(E_m - E_j)t + \int_0^t \left(\langle m|H^{III}_{WW}|m\rangle - \langle j|H^{III}_{WW}|j\rangle\right)dt'\right]$$

Anmerkung: § Die φ_j sind Zweiquasiteilchenzustände.

Es gilt nun nach (III,4c)

$$\int_0^t \left[\langle m | H_{\omega}^{III} | m \rangle - \langle j | H_{\omega}^{III} | j \rangle \right] dt = -\chi \sum_{\mu} \left[\langle m | \hat{Q}_{\mu} | m \rangle - \langle j | \hat{Q}_{\mu} | j \rangle \right] \int_0^t \mathcal{E}_{\mu}(t') \, dt'$$

Da $\mathcal{E}_{\mu}(t)$ die "schnelle" Variation des kollektiven Deformationsparameters $\tilde{\mathcal{E}}_{\mu}$ um $\bar{\mathcal{E}}_{\mu}$ beschreibt, die in erster Näherung harmonisch angesehen werden kann, ist es zulässig, das Integral Null zu setzen. Das hat zur Folge, daß sich die Frequenz nicht ändert, und keine Energieniveauverschiebung durch die Diagonalterme auftritt. Die Schrödingergleichung lautet in dieser Form

(IV,7)
$$i\hbar \, \dot{c}_m = \sum_{j \neq m} c_j \langle m | H_{\omega}^{III} | j \rangle \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} (E_m - E_j) t \right]$$

Dieses DGl-System wird in ein Integralgleichungssystem überführt, wobei man über den gesamten Zeitraum zu integrieren hat, in dem die zeitlich variable Störung H_Q auf das System wirkt.

(IV,8)
$$c_m(t) = c_m(t_0) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{j \neq m} \int_0^t c_j(t') \langle m | H_{\omega}^{III} | j \rangle \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} (E_m - E_j) t' \right] dt'$$

Bei der iterativen Lösung dieses Gleichungssystemes - der Schrödingergleichung in der Wechselwirkungsdarstellung - wird von den folgenden Anfangswerten der Entwicklungskoeffizienten $c_j(t)$ ausgegangen.

(IV,9)
$$c_j^{[0]}(t) = \delta_{j0}$$

Das bedeutet, daß in nullter Näherung keine Störung wirkt, und daß das System vollständig durch H_{def} beschrieben wird. Durch Einsetzen von diesen Anfangswerten in das Gleichungssystem (IV,8) erhält man die erste Ordnung der Entwicklungskoeffizienten.

(IV,1o)
$$c_0^{[1]}(t) = 1$$

$$c_{m \neq 0}^{[1]}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t \langle m | H_{\omega}^{III} | 0 \rangle \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} (E_m - E_0) t' \right] dt'$$

Zur Lösung des Integrales

(IV,1oa)
$$\int_{t_0}^t \langle m | H_{\omega}^{III} | 0 \rangle \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} (E_m - E_0) t' \right] dt' = -\chi \sum_{\mu} Q_{m0}^{\mu} \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{\mu}(t') \exp\left[\tfrac{i}{\hbar} (E_m - E_0) t \right] dt'$$

wobei $Q_{mj}^{\mu} \equiv \langle m | \hat{Q}_{\mu} | j \rangle$ gilt (siehe (III,4c)), werden im Folgenden zwei Möglichkeiten diskutiert.

i) Da $\mathcal{E}_\mu(t)$ die Kernvibrationen um das Gleichgewicht $\bar{\mathcal{E}}_\mu$ beschreibt, liegt es nahe, für die Störungstheorie 1. Ordnung einen harmonischen Ansatz für $\mathcal{E}_\mu(t)$ zu machen,

(IV,11) $$\mathcal{E}_\mu(t) = \gamma_\mu \left[e^{i\,\Omega_\mu^{[1]} t} + e^{-i\,\Omega_\mu^{[1]} t} \right]$$

wobei die eingeführten Parameter γ_μ und $\Omega_\mu^{[1]}$ später mit Hilfe des Virialsatzes fixiert werden. Mit diesem Ansatz läßt sich das Integral leicht lösen. Die dabei entstehende Konstante wird Null gesetzt, damit die mittleren Amplituden der virtuellen Beimischungen zum Grundzustand verschwinden. Für Störungstheorie höherer Ordnung läßt sich dieser Ansatz verallgemeinern.

(IV,12) $$\mathcal{E}_\mu^{[m]}(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_\mu^{[j]} \left[e^{i\,\Omega_\mu^{[j]} t} + e^{-i\,\Omega_\mu^{[j]} t} \right]$$

ii) Durch fortgesetzte Integration kann das Integral formal in eine unendliche Reihe in $\mathcal{E}_\mu$ und seine zeitlichen Ableitungen überführt werden.

(IV,13) $$\int_{t_0}^{t} \mathcal{E}_\mu(t') \exp\left[\tfrac{i}{\hbar}(E_m - E_0)t'\right] dt' = \frac{\hbar}{E_m - E_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \left[\frac{\hbar}{E_m - E_0}\right]^k \frac{d^k}{dt^k} \mathcal{E}_\mu(t)$$

Betrachtet man wieder den unter i) beschriebenen harmonischen Ansatz, so bringt jede Ableitung einen Faktor $\Omega/[E_m - E_0]$, wobei Ω eine typische Kernvibrationsfrequenz (< o,5 MeV) und $E_m - E_0$ eine Zweiquasiteilchenanregung (2MeV)sind, also gilt $\Omega/[E_m - E_0] \ll 1$.

Es ist deshalb gerechtfertigt, sich in dieser Reihe auf die physikalisch interpretierbaren Glieder in $\mathcal{E}_\mu$ und $\dot{\mathcal{E}}_\mu$ zu beschränken. Diese Näherung wollen wir im Folgenden die "adiabatische" nennen, um zu betonen, daß ihre Gültigkeit stark auf dem günstigen Verhältnis $\Omega/[E_m - E_0]$, von kollektiver Anregungsenergie zur Teilchenanregungsenergie, beruht.

Um die freien Parameter $\Omega^{[j]}$ der ersten Lösungsmethode von (IV,1oa) zu bestimmen, setzt man den Ansatz (IV,12) in den allgemeinen kollektiven Hamilton-Operator (I,2) ein,§ und man erhält mit dem Virialsatz und/oder der Normierung der Entwicklungskoeffizienten Bestimmungsgleichungen für die $\Omega^{[j]}$. Durch numerische Iteration werden dann die Ω -Werte fixiert.

---

§ Man muß beachten, daß in (I,2) die Tensorkomponenten die Oberflächendeformation, der Ansatz (IV,12) aber Potentialdeformationen beschreiben.

Da dieses Verfahren, besonders wenn man höhere Ordnungen berücksichtigt, außerordentlich rechenintensiv ist, werden wir im Folgenden die zweite Lösungsmethode, die "adiabatische", benutzen.

In erster Ordnung Störungsrechnung erhalten wir die folgende Funktion für die Entwicklungskoeffizienten von (IV,3)

(IV,14) $$C_0^{[1]} = 1$$

$$C_{m\neq 0}^{[1]} = \chi \sum_\mu Q_{m0}^\mu \left[\frac{\varepsilon_\mu}{(m-0)} - \frac{\hbar}{i} \frac{\dot\varepsilon_\mu}{(m-0)^2} \right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}(m-0)t\right]$$

Dabei wurde für das Matrixelement des Operators $\hat Q_\mu$ (III,2d) bezüglich der BCS-Wellenfunktionen und die Differenz der BCS-Energien die Abkürzungen

(IV,15) $$Q_{m0}^\mu \equiv \langle m | \hat Q_\mu | 0 \rangle$$

$$(m-0) \equiv E_m - E_0$$

benutzt.

Die n-te Ordnung der $C_j(t)$ erhält man durch Einsetzen der (n-1)-ten Ordnung in das Gleichungssystem (IV,8). Die Entwicklungskoeffizienten bis einschließlich dritter Ordnung sind im Anhang C angegeben.

Mit der Grundzustandsfunktion ψ_0 (IV,3) werden die Erwartungswerte von H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) gebildet. Dadurch erhält man die Energie des Kernes im Grundzustand als Funktion der Deformationsparameter $\tilde\varepsilon_\mu$ und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\tilde\varepsilon}_\mu$. Diese Energie wird mit der klassischen Hamiltonfunktion (II,3), (II,4) identifiziert, um die dort auftretenden Konstanten B_j und C_j zu berechnen.

Es muß darauf geachtet werden, daß die Hamiltonfunktion (II,3), (II,4) von den Oberflächenparametern $\tilde a_\mu$ abhängt, die hier gebildeten Energien aber von den Deformationsparametern $\tilde\varepsilon_\mu$. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird im folgenden Absatz beschrieben.

V Der Zusammenhang der Potentialparameter $\tilde{\varepsilon}_\mu$ mit den Oberflächenkoordinaten $\tilde{a}_\mu$

Es wurde darauf hingewiesen, daß in den Rechnungen zwei unterschiedliche Arten von Kollektivparametern benutzt werden: einmal die Oberflächenkoordinaten $\tilde{a}_\mu$ der Radiusentwicklung (I,1) und andererseits die Deformationsparameter $\tilde{\varepsilon}_\mu$ des Schalenmodellpotentials. Eine Unterscheidung dieser beiden Arten von kollektiven Parametern ist notwendig, weil sich die Koordinaten $\tilde{a}_\mu$ in der Hamiltonfunktion (II,3), (II,4) und in den kollektiven Multipoloperatoren primär auf die Massenverteilung des Kernes beziehen. Im Gegensatz dazu stimmt die Deformation $\tilde{\varepsilon}_\mu$ des Schalenmodellpotentials nur an den Extremwerten der PES mit der Deformation der dazugehörigen Dichteverteilung überein 17).

Eine Verknüpfung der Parameter kann über das Quadrupolmoment des Kernes geschehen. Der Erwartungswert des Q-Operators im Grundzustand Ψ_o (IV,3) ergibt sich zu

(V,1)

$$\tilde{q}_\mu = \langle \Psi_o | \hat{Q} | \Psi_o \rangle$$

$$= \langle o|\hat{Q}|o\rangle + \sum_{m\neq o}\left[c_m^* \langle o|\hat{Q}|m\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(m-o)t} + c_m \langle m|\hat{Q}|o\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(o-m)t}\right]$$

$$+ \sum_{m\neq o}\sum_{j\neq o} c_j^* c_m \langle j|\hat{Q}|m\rangle e^{\frac{i}{\hbar}(j-m)t}$$

Die Matrixelemente $\langle o|\hat{Q}|m\rangle$ des vollständigen Q-Operators (III,1b) mit den Eigenfunktionen von H_{def} stimmen mit denen des modifizierten Q-Operators (III,2d) überein, wenn $m \neq o$ gilt. Diese Eigenschaft kann man bis auf den ersten Term $\langle o|\hat{Q}|o\rangle$ benutzen, um eine einheitliche Notierung der Matrixelemente zu erhalten. Beschränkt man sich vorerst auf Terme erster Ordnung, dann reduziert sich (V,1) auf ein lineares Gleichungssystem §

(V,2)

$$\tilde{q}_\mu = \langle o|\hat{Q}|o\rangle + 2\chi \sum_\nu \sum_{m\neq o} \frac{\tilde{Q}_{om}^\mu \tilde{Q}_{mo}^\nu}{(m-o)} \varepsilon_\nu$$

Anmerkung: § Da die Linearkombination $Q^2 = r^2[Y_{22} + Y_{2-2}]$ benutzt wurde, gilt $\langle o|\hat{Q}^\mu|m\rangle^* = \langle m|\hat{Q}^\mu|o\rangle$.

Da $Q^{\nu}_{om}\, Q^{\nu}_{mo} = 0$ ist, wenn $\mu \neq \nu$, fällt die Summation über den Index fort. Zerlegt man nun $\tilde{q}_\mu$ in einen statischen Anteil $\bar{q}_\mu$ und einen zeitlich veränderlichen $q_\mu(t)$ und identifiziert man die zeitunabhängigen Anteile miteinander

(V,3)
$$\bar{q}_\mu = \langle 0 | Q^{\nu}_{10} | 0 \rangle$$

dann erhält man

(V,4)
$$q_\mu(t) = 2\chi \sum_{m \neq 0} \frac{Q^{\nu}_{om}\, a^{\nu}_{mo}}{(m-0)}\, \varepsilon_\mu(t)$$

Die Lösungen höherer Ordnung von (V,1) erhält man durch sukzessive Approximation, wobei (V,4) als Anfangswerte benutzt werden.

(V,5)
$$\tilde{q}_\mu = \tilde{q}_\mu(\tilde{\varepsilon}_\nu, \dot{\tilde{\varepsilon}}_\nu)$$

Diese Gleichung kann iterativ nach $\tilde{\varepsilon}_\nu$ aufgelöst werden (siehe Anhang D,I).

(V,6)
$$\tilde{\varepsilon}_\nu = \tilde{\varepsilon}_\nu(\tilde{q}_\mu, \dot{\tilde{q}}_\mu)$$

Da $\tilde{\varepsilon}_\nu$ als auch $\tilde{q}_\mu$ oft als kollektive Koordinaten benutzt werden, geschieht dies auch im folgenden Teil der Arbeit (Absatz VI).

Die kollektiven Quadrupolmomente können andererseits als Funktion der Quadrupolkoordinaten $\tilde{a}_\mu$ berechnet werden 5). Dazu integriert man den Quadrupoloperator $r^2 Y_{2\mu}$ mit einer klassischen Dichtefunktion $\varrho(\vec{r}, \tilde{a}_\mu)$ über das gesamte Kernvolumen.

(V,7)
$$Q^{kl}_{2\mu} = \int_{Kern} \varrho(\vec{r}, \tilde{a}_\mu)\, r^2 Y_{2\mu}\, d\tau$$

Um eine Übereinstimmung der geometrischen Form der Kernoberfläche

$$R = R_0 \cdot f\left(\sum_\mu \tilde{a}_\mu Y_{2\mu}\right)$$

mit den Ellipsoiden (III,2a) der Äquipotentialflächen zu erreichen, muß man die folgende Radiusentwicklung wählen

(V,8)
$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_\mu \tilde{a}_\mu Y_{2\mu}}}$$

Eine Verknüpfung der üblicherweise benutzten Quadrupolfläche (I,1) mit der des Ellipsoides (V,8) ist im Allgemeinen nur an sechs Punkten exakt möglich (z.B. den Durchstoßpunkten der Hauptachsen),

während an allen anderen Punkten mit wachsender Deformation die Abweichungen größer werden. Dieser Umstand ist aber nicht schwerwiegend, denn H_{def} ist nur für relativ kleine Deformationen sinnvoll, und für diese fallen die Abweichungen der Flächen nicht ins Gewicht.

Die Auswertung der Integrale ergibt, wenn man eine konstante Dichte ansetzt und die Volumenerhaltung berücksichtigt

(V,9)

$$Q_{20}^{kc} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\, A R_K^2 \, \frac{6\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2}{[(1-\alpha-\beta)(1-\alpha+\beta)(1+2\alpha)]^{2/3}}$$

$$Q_{2\pm2} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\, A R_K^2 \, \frac{\beta(2-\alpha)}{[(1-\alpha-\beta)(1-\alpha+\beta)(1+2\alpha)]^{2/3}}$$

wobei gilt

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\tilde{a}_0 \quad ; \quad \beta = 2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\tilde{a}_2 \quad ; \quad R_K = 1.2\, A^{1/3}\ [fm]$$

Durch Gleichsetzen des in (V,1) definierten Erwartungswertes der Quadrupoloperatoren

$$\tilde{Q}_\mu = \tilde{Q}_\mu(\tilde{\varepsilon}_\nu, \dot{\tilde{\varepsilon}}_\nu)$$

mit den klassischen Quadrupolmomenten (V,9)

$$Q_{2\mu}^{kc} = Q_{2\mu}^{kc}(\tilde{a}_\mu)$$

lassen sich die Koordinaten $\tilde{a}_\mu$ mit den Deformationsparametern $\tilde{\varepsilon}_\nu$ verknüpfen.

(V,1o)

$$\tilde{a}_\mu = \tilde{a}_\mu(\tilde{\varepsilon}_\mu, \dot{\tilde{\varepsilon}}_\mu)$$

Diese Transformation ist im Anhang D,II und D,III (siehe Figur 2) durchgeführt.

Aufgrund der theoretischen Ergebnisse von Kerman 17) kann man erwarten, daß die Q-Momente $\tilde{Q}_\mu(\tilde{\varepsilon}_\nu, \dot{\tilde{\varepsilon}}_\nu)$ und $Q_{2\mu}^{kc}(\tilde{a}_\mu)$ an den Extremwerten der PES ($\mathcal{E}_o(\tilde{\varepsilon}_\mu)$) übereinstimmen, also im sphärischen Fall, an den Grundzustandsdeformationen und den Sattelpunkten. Wie man aus Figur 1 entnehmen kann, ist dies sehr gut für die statischen Anteile erfüllt. Zwischen diesen charakteristischen Punkten weichen die verschieden gerechneten Q-Momente bis zu 1o% voneinander ab. Ebenso stimmt die Beziehung (V,1o) zwischen $\tilde{a}_\mu$ und $\tilde{\varepsilon}_\nu$ nur bis

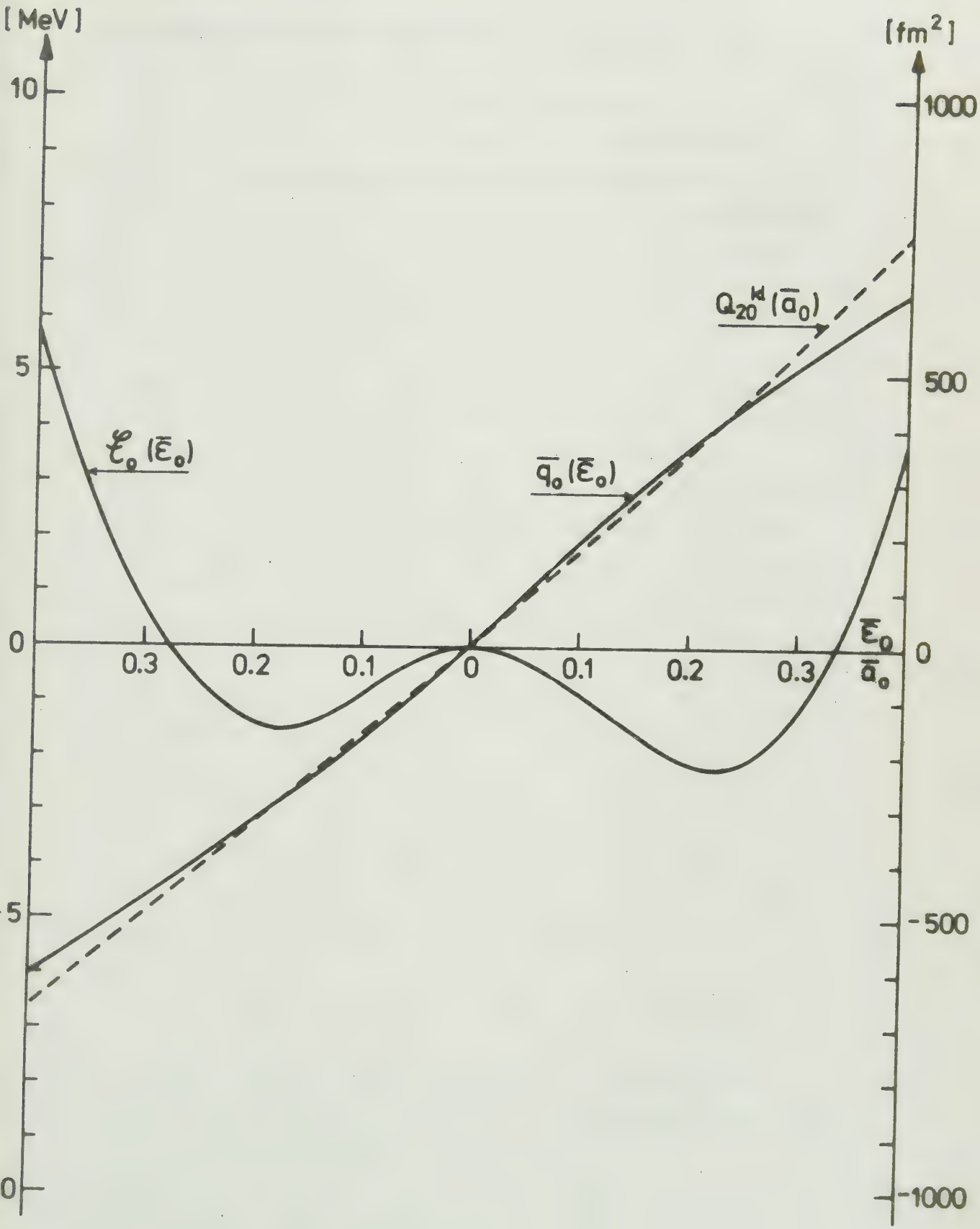

[MeV]
[fm²]
10
5
0
-5
-10
1000
500
0
-500
-1000
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{\varepsilon}_0(\bar{\varepsilon}_0)$
$\bar{q}_0(\bar{\varepsilon}_0)$
$Q_{20}^{HF}(\bar{a}_0)$
$\bar{\varepsilon}_0$
$\bar{a}_0$

Fig.1

auf etwa 1o% mit der simplen Identifikation der beiden Deformationsparameter

(V,11)
$$\tilde{a}_{\mu} \equiv \tilde{\varepsilon}_{\mu}$$

überein (Figur 2). In den Rechnungen werden sowohl (V,1o) als auch (V,11) benutzt.

VI Der Grundzustandserwartungswert

Die Wellenfunktion $\Psi_0(t)$ (IV,3) des Grundzustandes, die aus H^{III} (III,4) durch den Formalismus der zeitabhängigen Störungsrechnung gewonnen wurde, liegt als explizite Funktion der kollektiven Parameter $\varepsilon_\nu(t)$ bzw. $q_\nu(t)$ vor. Bei der Berechnung des Grundzustandserwartungswertes liegt es nun nahe, diesen mit dem H-Operator H^{III} (III,4) zu bilden. Dies wird in der Literatur gewöhnlich nicht durchgeführt 15), 16), 17), 2o). Dort wird mit $\Psi_0(t)$ der Erwartungswert von H^{II} (III,2) berechnet und man rechtfertigt dieses Vorgehen damit, daß man von einer Q-Q-Kraft ausgegangen sei, und man wegen der bereits erwähnten mathematischen Schwierigkeiten die Wellenfunktion Ψ_0 (IV,3) als Näherung der Eigenfunktionen von H^{II} benutzt. Um die Konsequenzen dieses Verfahrens zu prüfen, wird von beiden H-Operatoren der Grundzustandserwartungswert gebildet. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da in dieser Arbeit die kollektiven Eigenschaften der Kerne nicht aus den Einteilchenwellenfunktionen deduziert, sondern durch phänomenologische Ansätze definiert werden.

Beide H-Operatoren enthalten als zeitunabhängigen Anteil H_{def} und somit gilt

(VI,1)

$$\langle \Psi_0 | H^{II} | \Psi_0 \rangle \equiv E_0^{II} = \sum_m E_m c_m^* c_m + \langle \Psi_0 | H_{aa}^{II} | \Psi_0 \rangle$$

$$\langle \Psi_0 | H^{III} | \Psi_0 \rangle \equiv E_0^{III} = \sum_m E_m c_m^* c_m + \langle \Psi_0 | H_a | \Psi_0 \rangle$$

Die Summe über die Entwicklungskoeffizienten c_m (IV,3) läßt sich mittels der Vollständigkeitsrelation umformen in

(VI,2)

$$E_0^{II} = \mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_\nu) + \sum_{m\neq 0} (m-0) c_m^* c_m + \langle \Psi_0 | H_{aa}^{II} | \Psi_0 \rangle$$

$$E_0^{III} = \mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_\nu) + \sum_{m\neq 0} (m-0) c_m^* c_m + \langle \Psi_0 | H_a | \Psi_0 \rangle$$

$\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_\nu)$ ist der statische Anteil der Potentialenergiefläche, der in vielen Arbeiten untersucht wird 21).

(VI,3)

$$\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_\nu) = 2 \sum_\tau \varepsilon_\tau^{\text{NILSSON}}(\bar{\varepsilon}_\nu) V_\tau^2(\bar{\varepsilon}_\nu) - \frac{\Delta^2}{G}$$

$V_i^2(\bar{\varepsilon}_\nu)$ ist die Besetzungswahrscheinlichkeit des i-ten Nilsson-Levels $\varepsilon_\mu^{\text{Nilsson}}(\bar{\varepsilon}_\nu)$, und Δ stellt den Gap und G die Stärke der Paarkraft im BCS-Formalismus dar (Einzelheiten im Anhang B, III).

Der dynamische Anteil der PES, d.h. die Veränderungen (Schwingungen) um den statischen Anteil (VI,3), wird durch die verbleibenden Terme in (VI,2) beschrieben. Setzt man die Operatoren H_{QQ}^{II} (III,2c) und H_Q (III,4a) mit den Entwicklungskoeffizienten c_m (C,3) in (VI,2) ein, dann erhält man konsistent in vierter Ordnung (VI,4)

$$
\begin{aligned}
E_o^2 &= \mathcal{E}_o(\bar{\varepsilon}_\nu) \\
&+\chi^2 \sum_\mu \left[C_{21}^2(\mu) - \chi' C_{22}^2(\mu) \right] \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu \\
&+\chi^3 \sum_{\mu\nu\gamma} \left[C_{31}^2(\mu\nu\gamma) - \chi' C_{32}^2(\mu\nu\gamma) \right] \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \varepsilon_\gamma \\
&+\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[C_{41}^2(\mu\nu\gamma\delta) - \chi' C_{42}(\mu\nu\gamma\delta) \right] \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \\
&+\hbar^2\chi^2 \sum_\mu B_2^2(\mu)\, \dot{\varepsilon}_\mu \dot{\varepsilon}_\mu \\
&+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\nu\gamma} \left[B_{311}^2(\mu\nu\gamma) - \chi' B_{312}^2(\mu\nu\gamma) \right] \varepsilon_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \\
&+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\nu\gamma} \left[B_{32}^2(\mu\nu\gamma)\, \dot{\varepsilon}_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \varepsilon_\gamma + B_{33}^2(\mu\nu\gamma)\, \dot{\varepsilon}_\mu \varepsilon_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \right] \\
&+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[B_{411}^2(\mu\nu\gamma\delta) - \chi' B_{412}^2(\mu\nu\gamma\delta) \right] \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \dot{\varepsilon}_\delta \\
&+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[B_{421}^2(\mu\nu\gamma\delta) - \chi' B_{422}^2(\mu\nu\gamma\delta) \right] \varepsilon_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \varepsilon_\delta \\
&+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[B_{431}^2(\mu\nu\gamma\delta) - \chi' B_{432}^2(\mu\nu\gamma\delta) \right] \varepsilon_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \varepsilon_\gamma \dot{\varepsilon}_\delta \\
&+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[B_{44}^2(\mu\nu\gamma\delta)\, \dot{\varepsilon}_\mu \varepsilon_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \varepsilon_\delta + B_{45}^2(\mu\nu\gamma\delta)\, \dot{\varepsilon}_\mu \varepsilon_\nu \varepsilon_\gamma \dot{\varepsilon}_\delta + B_{46}^2(\mu\nu\gamma\delta)\, \dot{\varepsilon}_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \right] \\
&+\hbar^4\chi^4 \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \left[B_{471}^2(\mu\nu\gamma\delta) - \chi' B_{472}^2(\mu\nu\gamma\delta) \right] \dot{\varepsilon}_\mu \dot{\varepsilon}_\nu \dot{\varepsilon}_\gamma \dot{\varepsilon}_\delta
\end{aligned}
$$

Hier wurde der Erwartungswert $\langle u_o | H^{II} | u_o \rangle$ als Funktion der $\tilde{\varepsilon}_\mu(t)$ (III,5) angegeben. Die Massen- und Potentialfunktionen (es sind Funktionen der statischen Deformationsparameter $\bar{\varepsilon}_\mu$) $B_{ijk}^2(\mu\cdots)$ bzw. $C_{ij}^2(\mu\cdots)$ wurden mit arabischen Indizes versehen, um sie von denjenigen Massen- und Potentialfunktionen $B_{ijk}^{II}(\mu\cdots)$ bzw. $C_{ij}^{II}(\mu\cdots)$ zu unterscheiden, die bei dem

Erwartungswert $\langle u_0 | H^{II} | u_0 \rangle$ in der $\tilde{q}_\mu(t)$ (III,7)-Darstellung entstehen.

(VI,5)

$$
\begin{aligned}
E_0^{II} &= \mathcal{E}_0(\vec{q}_\nu) \\
&+ \chi^2 \sum_\mu \left[C_2^{II}(\mu) - \tfrac{1}{2}\chi' \right] q_\mu q_\mu \\
&+ \chi^3 \sum_{\mu\nu\varrho} C_3^{II}(\mu\nu\varrho)\; q_\mu q_\nu q_\varrho \\
&+ \chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} C_4^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; q_\mu q_\nu q_\varrho q_\sigma \\
&+ \hbar^2\chi^2 \sum_\mu B_2^{II}(\mu)\; \dot{q}_\mu \dot{q}_\mu \\
&+ \hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\nu\varrho} \left[B_{31}^{II}(\mu\nu\varrho)\; q_\mu \dot{q}_\nu \dot{q}_\varrho + B_{32}^{II}(\mu\nu\varrho)\; \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu q_\varrho \right] \\
&+ \hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\nu\varrho} B_{33}^{II}(\mu\nu\varrho)\; \dot{q}_\mu q_\nu \dot{q}_\varrho \\
&+ \hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} \left[B_{41}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; q_\mu q_\nu \dot{q}_\varrho \dot{q}_\sigma + B_{42}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; q_\mu \dot{q}_\nu \dot{q}_\varrho q_\sigma \right] \\
&+ \hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} \left[B_{43}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; q_\mu \dot{q}_\nu q_\varrho \dot{q}_\sigma + B_{44}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; \dot{q}_\mu q_\nu \dot{q}_\varrho q_\sigma \right] \\
&+ \hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} \left[B_{45}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; \dot{q}_\mu q_\nu q_\varrho \dot{q}_\sigma + B_{46}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu q_\varrho q_\sigma \right] \\
&+ \hbar^4\chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} B_{47}^{II}(\mu\nu\varrho\sigma)\; \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu \dot{q}_\varrho \dot{q}_\sigma
\end{aligned}
$$

Bei dem Erwartungswert $\langle u_0 | H^{III} | u_0 \rangle$ wird analog wie bei (VI,4) und (VI,5) die Indizierung mit arabischen und römischen Zahlen dazu benutzt, um die beiden Darstellungen zu unterscheiden.

(VI,6)

$$
\begin{aligned}
E_0^{3} &= \mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_\nu) \\
&+ \chi^2 \sum_\mu C_2^{3}(\mu)\; \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu \\
&+ \chi^3 \sum_{\mu\nu\varrho} C_3^{3}(\mu\nu\varrho)\; \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \varepsilon_\varrho \\
&+ \chi^4 \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} C_4^{3}(\mu\nu\varrho\sigma)\; \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \varepsilon_\varrho \varepsilon_\sigma \\
&+ \hbar^2\chi^2 \sum_\mu B_2^{3}(\mu)\; \dot{\varepsilon}_\mu \dot{\varepsilon}_\mu
\end{aligned}
$$

$$+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\sim\varphi}\Big[B^{3}_{31}(\mu\sim\varphi)\;\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi + B^{3}_{32}(\mu\sim\varphi)\;\dot\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \varepsilon_\varphi\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\sim\varkappa} B^{3}_{33}(\mu\sim\varphi)\;\dot\varepsilon_\mu \varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{3}_{41}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\varepsilon_\mu \varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi \dot\varepsilon_\sigma + B^{3}_{42}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi \varepsilon_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{3}_{43}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \varepsilon_\varphi \dot\varepsilon_\sigma + B^{3}_{44}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot\varepsilon_\mu \varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi \varepsilon_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{3}_{46}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot\varepsilon_\mu \varepsilon_\sim \varepsilon_\varphi \dot\varepsilon_\sigma + B^{3}_{46}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \varepsilon_\varphi \varepsilon_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^4\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma} B^{3}_{47}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot\varepsilon_\mu \dot\varepsilon_\sim \dot\varepsilon_\varphi \dot\varepsilon_\sigma$$

(VI,7)

$$E_o^{III} = E_o(\bar q_\sim)$$

$$+\chi^2 \sum_\mu C^{III}_2(\mu)\;q_\mu q_\mu$$

$$+\chi^3 \sum_{\mu\sim\varphi} C^{III}_3(\mu\sim\varphi)\;q_\mu q_\sim q_\varphi$$

$$+\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma} C^{III}_4(\mu\sim\varphi\sigma)\;q_\mu q_\sim q_\varphi q_\sigma$$

$$+\hbar^2\chi^2 \sum_\mu B^{III}_2(\mu)\;\dot q_\mu \dot q_\mu$$

$$+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\sim\varphi}\Big[B^{III}_{31}(\mu\sim\varphi)\;q_\mu \dot q_\sim \dot q_\varphi + B^{III}_{32}(\mu\sim\varphi)\;\dot q_\mu \dot q_\sim q_\varphi\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^3 \sum_{\mu\sim\varphi} B^{III}_{33}(\mu\sim\varphi)\;\dot q_\mu q_\sim \dot q_\varphi$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{III}_{41}(\mu\sim\varphi\sigma)\;q_\mu q_\sim \dot q_\varphi \dot q_\sigma + B^{III}_{42}(\mu\sim\varphi\sigma)\;q_\mu \dot q_\sim \dot q_\varphi q_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{III}_{43}(\mu\sim\varphi\sigma)\;q_\mu \dot q_\sim q_\varphi \dot q_\sigma + B^{III}_{44}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot q_\mu q_\sim \dot q_\varphi q_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^2\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma}\Big[B^{III}_{45}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot q_\mu q_\sim q_\varphi \dot q_\sigma + B^{III}_{46}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot q_\mu \dot q_\sim q_\varphi q_\sigma\Big]$$

$$+\hbar^4\chi^4 \sum_{\mu\sim\varphi\sigma} B^{III}_{47}(\mu\sim\varphi\sigma)\;\dot q_\mu \dot q_\sim \dot q_\varphi \dot q_\sigma$$

Vergleicht man die Struktur der Erwartungswerte von H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4), dann ergibt sich aus (VI,2), daß beide in der Beschreibung des statischen Anteiles der Potentialenergiefläche übereinstimmen. In den dynamischen Anteilen der PES und denen der kinetischen Energie treten zwar die unterschiedlichen Störterme H^{II}_{QQ} (III,2c) und H_Q (III,4a)

auf, aber die Hauptanteile sind gleich. Eine detaillierte Gegenüberstellung der einzelnen Potential- und Massenfunktionen (siehe (E,1) und (E,2)) in der $\{\tilde{\varepsilon}(t)\}$-Darstellung zeigt aber, daß sich bis auf die Massenfunktionen 2. Ordnung alle Funktionen der kinetischen und potentiellen Energie im Wesentlichen darin unterscheiden, daß diejenigen des H^{II}-Ansatzes χ'-abhängige Anteile enthalten.

Das Auftreten der Stärke χ' der QQ-Kraft in dem Erwartungswert von H^{II} wird verständlich, wenn man die plausible Ableitung der Ansätze H^{II} und H^{III} im Abschnitt III auf deren Konsistenz hin überprüft. Dort wird von einem Oszillatoransatz mit einer QQ-Kraft (III,1) ausgegangen, und um den Ansatz H^{II} zu erhalten, wird nur der zeitunabhängige Anteil der QQ-Kraft durch ein mittleres Q-Feld (Nilsson-Potential) ersetzt. Die zeitabhängige Störung mit der Stärke χ' bleibt in dem Störterm (III,2c) in der alten QQ-Form erhalten. Dies wird in dem Ansatz von H^{III} vermieden, da dort auch der Störterm ein mittleres zeitabhängiges Q-Feld enthält.

Der Einfluß der Stärke der QQ-Kraft bei den Massen- und Potentialfunktionen ist viel schwächer, wenn man in die $\{\tilde{q}_\mu\}$-Darstellung übergeht (siehe (E,3) und (E,4)). Dort sind bei $\langle \psi_0 | H^{II} | \psi_0 \rangle$ nur die Potentialfunktionen 2. Ordnung von χ' abhängig, während bei den übrigen Funktionen der potentiellen und kinetischen Energie im Vergleich zu $\langle \psi_0 | H^{III} | \psi_0 \rangle$ zwar unterschiedliche, aber ähnliche Terme auftreten. Diese weitgehende Übereinstimmung der Erwartungswerte von H^{II} und H^{III} in der Quadrupoldarstellung überrascht nicht, da, wie bereits im Abschnitt III erwähnt, die Quadrupolmomente wesentliche kollektive Eigenschaften des Kernes beinhalten und dies in beiden Ansätzen berücksichtigt wird.

Zusammenfassend kann man sagen, da in dieser Arbeit die kollektiven Kerneigenschaften durch phänomenologische Ansätze beschrieben werden, ist es durch einen solchen Vergleich nicht möglich, einen von beiden zu verwerfen. Vorerst sind beide Ansätze gleichwertig, wobei zu beachten ist, daß man durch die Wahl von geeigneten χ'-Werten Unzulänglichkeiten des Ansatzes H^{II} ausgleichen kann und deshalb eher experimentelle Ergebnisse beschreiben kann. Wohingegen man mit H^{III} prüfen kann, wie gut diese Ansätze aus sich heraus die kollektiven Eigenschaften der Kerne beschreiben.

VII Bestimmung der kollektiven Energiefläche

Um die kernspezifischen Konstanten C_i und B_i der kollektiven Hamilton-Funktion (II,4) zu bestimmen, wird diese derart umgeformt, daß die unabhängigen Schwingungsvariablen $\tilde{a}_\mu(t)$, $\tilde{a}_\nu(t)$ des körperfesten Bezugssystemes in einen konstanten und einen zeitabhängigen Anteil zerlegt werden.

(VII,1)

$$\tilde{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu + a_\mu(t)$$

Dabei ist es für den weiteren Gang der Rechnung nicht notwendig, die Rotationsanteile der kinetischen Energie (II,4) auf diese Art umzuformen, da die mikroskopischen Ansätze (III,3) und (III,4) im körperfesten Bezugssystem formuliert werden. Man kann sich auf die Vibrationsanteile der kinetischen Energie und die Potentialterme von (II,4) beschränken. § Betrachtet man $\tilde{a}_\mu(t)$ als die unabhängigen Variablen, dann erhält man für das Potential bis zu sechster Ordnung

(VII,2)

$$V(\tilde{a}_\mu) = \mathcal{C}^0 + \sum_\mu \mathcal{C}^1(\mu)\, a_\mu + \sum_\mu \mathcal{C}^2(\mu)\, a_\mu a_\mu + \sum_{\mu\nu\gamma} \mathcal{C}^3(\mu\nu\gamma)\, a_\mu a_\nu a_\gamma$$
$$+ \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \mathcal{C}^4(\mu\nu\gamma\delta)\, a_\mu a_\nu a_\gamma a_\delta + \sum_{\mu\nu\gamma\delta\varepsilon} \mathcal{C}^5(\mu\nu\gamma\delta\varepsilon)\, a_\mu a_\nu a_\gamma a_\delta a_\varepsilon$$
$$+ \sum_{\mu\nu\gamma\delta\varepsilon\varkappa} \mathcal{C}^6(\mu\nu\gamma\delta\varepsilon\varkappa)\, a_\mu a_\nu a_\gamma a_\delta a_\varepsilon a_\varkappa$$

Die Vibrationsanteile lauten in vierter Ordnung

(VII,3)

$$T^1_{vib} = \sum_\mu \mathcal{L}^2(\mu)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\mu + \sum_{\mu\nu\gamma} \mathcal{L}^3(\mu\nu\gamma)\, a_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\gamma$$
$$+ \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \mathcal{L}^4(\mu\nu\gamma\delta)\, a_\mu a_\nu \dot{a}_\gamma \dot{a}_\delta$$

$$T^2_{vib} = \sum_{\mu\nu\gamma\delta} \mathcal{L}^5(\mu\nu\gamma\delta)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\gamma \dot{a}_\delta$$

Anmerkung: § Dies ist kein Mangel des benutzten Modelles, da in den oben genannten Termen alle Konstanten C_i und B_i enthalten sind; im Gegenteil, man reduziert hiermit den mathematischen Aufwand beträchtlich.

Bei dieser Umformung sind die $\mathcal{C}_i^L(\mu\cdots)$ und $\mathcal{D}^L(\mu\cdots)$ Polynome in den Variablen $\bar{a}_\mu$, deren Koeffizienten aus einfachen Linearkombinationen der Konstanten C_i und B_i der Gleichung (II,4) bestehen.

(VII,4)

$$\mathcal{C}^L(\mu\cdots) = P^L(C_2, C_3, C_4, \cdots ; \bar{a}_0, \bar{a}_2)$$

$$\mathcal{D}^L(\mu\cdots) = P^L(B_2, B_3, B_4, \cdots ; \bar{a}_0, \bar{a}_2)$$

$$\mathcal{D}^5(\mu\cdots) = P^5(B_5, \cdots ; \bar{a}_0, \bar{a}_2)$$

Im Anhang F sind die Polynome im Einzelnen aufgeführt. Ein Vergleich mit der funktionalen Form der Grundzustandsenergie (VI,4), (VI,5), (VI,6) und (VI,7) zeigt, daß dort die unabhängigen Parametervariablen in den gleichen Kombinationen wie in (VII,3) vorkommen §, und die jeweiligen Massen- bzw. Potentialfunktionen über die Matrixelemente der Einteilchenwellenfunktionen ebenso wie (VII,4) von den Deformationsparametern $\bar{\varepsilon}_\mu$ bzw. $\bar{q}_\mu$ abhängen.

Es liegt nun nahe, die mikroskopisch berechneten Massen- und Potentialfunktionen (z.B. die von (VI,4)) in Polynome der Form (VII,4) zu entwickeln und durch Koeffizientenvergleich die Modellkonstanten der kollektiven H-Funktion zu erhalten. Dies ist ohne Schwierigkeiten möglich, wenn die Tensorkomponenten $\tilde{a}_\mu(t)$ des Ansatzes (II,4) mit den Deformationsparametern $\hat{\varepsilon}_\mu(t)$ (III,6) des Potentials direkt identifiziert werden (V,11). Bei der genaueren Verknüpfung (V,11) müssen die Transformationsgleichungen $\tilde{q}_\mu = \tilde{q}_\mu(\tilde{a}_\mu)$ aus dem Anhang D verwendet werden.

Die Zeitableitungen $\dot{q}_\mu(t)$ werden mittels der totalen Differentiation nach a_μ transformiert

(VII,5)

$$\dot{q}_\mu = \frac{\partial q_\mu}{\partial a_0}\dot{a}_0 + \frac{\partial q_\mu}{\partial a_2}\dot{a}_2$$

Anmerkung: § Dies zeigt, daß die Einteilchenansätze und die Störungsrechnung die Rotations- und Zeitumkehrinvarianz erhalten.

Da die partiellen Ableitungen wiederum Funktionen von $\tilde{a}_\nu$ sind, werden durch diese Transformation aus einem Term n-ter Ordnung in der $\{\tilde{q}_\nu\}$-Darstellung Terme n-ter und höherer Ordnung in der $\{\tilde{a}_\nu\}$-Darstellung erzeugt. So ist z.B.

(VII,6)

$$\mathcal{B}_2^{II}(0)\,\dot{q}_0\,\dot{q}_0 = \mathcal{B}_2^{II}(0)\left[\left(\frac{\partial q_0}{\partial a_0}\right)^2 \dot{a}_0^2 + \left(\frac{\partial q_0}{\partial a_2}\right)^2 \dot{a}_2^2 + 2\left(\frac{\partial q_0}{\partial a_0}\,\frac{\partial q_0}{\partial a_2}\right)\dot{a}_0\,\dot{a}_2\right]$$

Führt man die Transformation auf die $\{\tilde{a}_\mu\}$-Darstellung bei allen Termen der Grundzustandserwartungswerte (VI,5) und (VI,7) durch, und ordnet man diese analog wie (VII,3) an, dann erhält man für die kollektive Grundzustandsenergie konsistent in vierter Ordnung (VII,7)

$$\begin{aligned}
E_0^{\xi} &= \mathcal{E}_0(\bar{a}_\nu) \\
&+ \sum_\mu \mathcal{C}_2^{\xi}(\mu)\; a_\mu a_\mu + \sum_{\mu\nu\varphi} \mathcal{C}_3^{\xi}(\mu\nu\varphi)\, a_\mu a_\nu a_\varphi \\
&+ \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \mathcal{C}_4^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, a_\mu a_\nu a_\varphi a_\sigma \\
&+ \hbar^2 \sum_\mu \mathcal{D}_2^{\xi}(\mu)\; \dot{a}_\mu \dot{a}_\mu \\
&+ \hbar^2 \sum_{\mu\nu\varphi} \{\mathcal{D}_{31}^{\xi}(\mu\nu\varphi)\, a_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\varphi + \mathcal{D}_{32}^{\xi}(\mu\nu\varphi)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\nu a_\varphi + \mathcal{D}_{33}^{\xi}(\mu\nu\varphi)\, \dot{a}_\mu a_\nu \dot{a}_\varphi\} \\
&+ \hbar^2 \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \{\mathcal{D}_{41}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, a_\mu a_\nu \dot{a}_\varphi \dot{a}_\sigma + \mathcal{D}_{42}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, a_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\varphi a_\sigma + \mathcal{D}_{43}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, a_\mu \dot{a}_\nu a_\varphi \dot{a}_\sigma \\
&\quad + \mathcal{D}_{44}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, \dot{a}_\mu a_\nu \dot{a}_\varphi a_\sigma + \mathcal{D}_{45}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, \dot{a}_\mu a_\nu a_\varphi \dot{a}_\sigma + \mathcal{D}_{46}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\nu a_\varphi a_\sigma\} \\
&+ \hbar^4 \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \mathcal{D}_{42}^{\xi}(\mu\nu\varphi\sigma)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\varphi \dot{a}_\sigma
\end{aligned}$$

Der Index ξ nimmt die Werte II oder III an, je nachdem, ob von (VI,5) oder (VI,7) ausgegangen wurde. Die einzelnen Massen- und Potentialfunktionen werden im Anhang E,II angegeben.

Man hat nun in beiden Darstellungen die mikroskopisch berechneten Potential- und Massenfunktionen $\mathcal{C}_{\nu\dots}^{\xi}(\mu\cdots)$ und $\mathcal{B}_{\nu\lambda}^{\xi}(\mu\cdots)$ (VI,4), (VI,6) bzw. $\mathcal{C}_\nu^{\xi}(\mu\cdots)$ und $\mathcal{D}_{\nu\lambda}^{\xi}(\mu\cdots)$ in der Form vorliegen, die es ermöglicht, durch einen Koeffizientenvergleich die kernspezifischen Modellkonstanten C_i und B_{ij} des Ansatzes (I,3) zu bestimmen.

VIII Vergleich mit Berechnungen der kollektiven Energie im Cranking-Modell

Bei einer Durchsicht der zahlreichen Arbeiten, in denen die kollektiven Bewegungen des Kernes mit phänomenologischen Ansätzen beschrieben und mit adiabatischen Näherungen berechnet werden 5), 15), 17), 2o), 31), fällt es auf, daß fast immer der erste Term der kinetischen kollektiven Energie mit demjenigen übereinstimmt, den man aus dem Cranking-Modell 3o) erhält. Da dies auch für diese Arbeit zutrifft, wird im Folgenden stichwortartig das Konzept des Cranking-Modelles beschrieben, um anschließend einige Unterschiede der einzelnen Ansätze zu verdeutlichen.

Als Erstes wählt man im Cranking-Modell eine kollektive Koordinate, z.B. a. Für jeden Wert von a wird der "wahre" Ansatz des kollektiven Hamilton-Operators $H(a(t), \dot{a}(t))$ durch einen einfacheren statischen und lösbaren $H'(a)$ angenähert, der explizit die kollektive Koordinate a als Parameter linear enthält. Sei $E'(a)$ ein Eigenwert und $|i(a)\rangle$ die dazu gehörende Eigenfunktion von $H'(a)$. Im nächsten Schritt wird angenommen, daß nunmehr die kollektive Koordinate a eine schwache Funktion der Zeit sei, d.h. die kollektive Geschwindigkeit $\dot{a}$ soll klein sein, damit später höhere Ableitungen von a vernachlässigt werden können. Die zeitabhängige Lösung der Schrödinger-Gleichung bezüglich $H'(a(t))$ wird mit der "adiabatischen Störungsrechnung" 32) gefunden. Dazu wird die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(a(t), \dot{a}(t))$ nach den Eigenfunktionen $|i(a)\rangle$ von $H'(a)$ entwickelt. Anschließend bildet man mit $\psi_0(a(t),\dot{a}(t))$ von $H(a(t))$ den Energieerwartungswert und erhält für die kollektive Energie in 2. Ordnung

(VIII,1)

$$H_{crank.} = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}(a)\,\dot{a}^2 + \tfrac{1}{2}C(a)\,a^2$$

Wird für $H'(a)$ als Beispiel ein Schalenmodellansatz mit der Paarkraft (BCS-Näherung) als Restwechselwirkung angenommen, dann erhält man für die kollektive Masse, wenn man g-g-Kerne betrachtet:

(VIII,2)

$$\mathcal{B}(a) = 2\hbar^2 \sum_{\nu\nu'\neq 0} \frac{\langle \sigma_{BCS}|\frac{\partial}{\partial a}|\nu\nu'\rangle\langle\nu'\nu|\frac{\partial}{\partial a}|\sigma_{BCS}\rangle}{E'_\nu + E'_{\nu'}}$$

Es ist anzumerken, daß in der gesamten Ableitung nur der Näherungsansatz $H'(a)$, nirgends aber der "wahre" Ansatz benutzt wird. Dieser dient lediglich dazu, die "adiabatische Störungsrechnung" zu rechtfertigen.

Hiernach werden die Matrixelemente $\langle \nu'\nu' | \frac{\partial}{\partial a} | 0_{BCS} \rangle$ umgeformt. Dazu bieten sich zwei gleichberechtigte Möglichkeiten an, die beide kurz beschrieben werden, da man scheinbar unterschiedliche Ergebnisse erhält, wenn man von BCS-Wellenfunktionen ausgeht.

Die eleganteste Umrechnung dieser Matrixelemente erhält man, wenn man davon ausgeht, daß die $|i(a)\rangle$ bzw. $|i\,i'\rangle$ (BCS-Wellenfunktionen) die exakten Eigenfunktionen von $H(a)$ sind. Dann gilt die bekannte Beziehung

$$\langle \alpha\alpha' | \frac{\partial}{\partial a} | \beta\beta' \rangle = \frac{\langle \alpha\alpha' | \frac{\partial H'(a)}{\partial a} | \beta\beta' \rangle}{[E'_\alpha + E'_{\alpha'}] - [E'_\beta + E'_{\beta'}]} \quad \text{wenn } \{\alpha\alpha'\} \neq \{\beta\beta'\}$$

und man erhält für die kollektive Masse (VIII,2)

(VIII,3)

$$\mathcal{B}(a) = 2\hbar^2 \sum_{\nu\nu' \neq 0} \frac{\langle 0_{BCS} | \hat{Q}'' | \nu\nu' \rangle \langle \nu'\nu | \hat{Q} | 0_{BCS} \rangle}{[E'_\nu + E'_{\nu'}]^3}$$

Hier wurde angenommen, daß in $H'(a)$ die kollektive Koordinate in einem Term $\sim a\hat{Q}$ vorkommt.

Es ist nun bekannt, daß bei der Diagonalisierung der Paarkraft für die BCS-Wellenfunktionen ein Ansatz gemacht wird 33), dessen Koeffizienten durch ein Variationsverfahren bestimmt werden. Aus diesem Grund wird in vielen Arbeiten der zweite Weg, die Differentiation in dem Matrixelement explizit durchzuführen, benutzt. Denn hierbei muß nicht vorausgesetzt werden, daß die $|i\,i'\rangle$ die exakten Eigenfunktionen von $H(a)$ sind.

Man erhält für die Ableitung des BCS-Grundzustandes

(VIII,4)

$$\frac{\partial}{\partial a} |0_{BCS}\rangle = -\sum_\nu \frac{1}{V_\nu} \frac{\partial u_\nu}{\partial a} \alpha^+_\nu \beta^+_\nu |0_{BCS}\rangle + \frac{\partial}{\partial a} |0_{BCS}\rangle|_{u,v}$$

Die hier und fortan verwendeten Symbole sind im Anhang B,III definiert. Da in dem zweiten Term von (VIII,4) die partielle Ableitung nach a bei dem BCS-Grundzustand auf die Teilchenoperatoren c_ν^+ des Schalenmodelloperators wirkt, muß man für die kollektive Koordinate den entsprechenden Operator einführen.

(VIII,5)

$$a \longrightarrow -i\frac{\partial}{\partial a} \equiv \hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{\nu\nu'} a_{\nu\nu'} \left[c^+_{\nu+} c_{\nu'+} - c^+_{\nu'-} c_{\nu-} \right]$$

Es muß hier das Minuszeichen verwendet werden, da sonst die Invarianz der Zeitumkehr verletzt würde. Deshalb gilt für die Matrixelemente von $\hat{\alpha}$ mit den Schalenmodellwellenfunktionen

(VIII,5a)

$$\langle \nu_- | \hat{\alpha} | \nu_- \rangle = - \langle \nu_+ | \hat{\alpha} | \nu_+ \rangle$$

Führt man die Ableitung nach a in dem zweiten Term von (VIII,4) mit Hilfe von (B,2o) durch, dann erhält man nach einigen Umformungen für die kollektive Masse (VIII,2)

(VIII,6)

$$B(a) = B_1(a) + B_2(a)$$

$$B_1(a) = 2\hbar^2 \sum_{\substack{\mu\mu' \\ \mu+\mu'}} \frac{\langle \mu | \hat{Q}'' | \mu' \rangle \langle \mu' | \hat{Q} | \mu \rangle}{\left[E_\mu' + E_{\mu'}' \right]^3} \left[u_\mu v_{\mu'} + u_{\mu'} v_\mu \right]^2$$

$$B_2(a) = \hbar^2 \sum_\mu \left[\frac{1}{V_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial a} \right]^2 \frac{1}{E_\mu'}$$

Da der zweite Term durch die Änderungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten u_μ zur kollektiven Masse beiträgt, deutet man ihn als die Wirkung der Paarvibrationen. Es wird im Folgenden gezeigt, daß dieser Term den Hauptbeitrag zu der kollektiven Masse (VIII,6) liefert.

Um die beiden Wege zur Berechnung der Matrixelemente $\langle \nu\nu' | \frac{\partial}{\partial a} | 0_{A<3} \rangle$ vergleichen zu können, transformiert man den Ausdruck (VIII,3) auch in die Schalenmodellbasis.

(VIII,7)

$$B(a) = 2\hbar^2 \sum_{\mu\mu'} \frac{\langle \mu | \hat{Q}'' | \mu' \rangle \langle \mu' | \hat{Q} | \mu \rangle}{\left[E_\mu' + E_{\mu'}' \right]^3} \left[u_\mu v_{\mu'} + u_{\mu'} v_\mu \right]^2$$

Man sieht, daß beide Methoden nur dann das gleiche Ergebnis liefern, wenn die Summe der diagonalen Matrixelemente von (VIII,7) dem Term B_2 der Paarvibrationen (VIII,6) entsprechen.

(VIII,8)
$$\sum_{\mu} \frac{\langle\mu|\hat{Q}^2|\mu\rangle\langle\mu|\hat{Q}|\mu\rangle}{E_\mu'^3}\left[u_\mu v_\mu\right]^2 = \sum_{\mu}\left[\frac{1}{V_\mu}\frac{\partial u_\mu}{\partial a}\right]\frac{1}{E_\mu'}$$

Formt man die rechte Seite (B_2) entsprechend um, dann findet man, daß die Gleichheit nicht erfüllt ist. Es verbleiben die Terme

(VIII,9)
$$R = \sum_{\mu}\Big\{\left[u_\mu v_\mu \frac{\partial\lambda}{\partial a}\right]^2 + 2\left[u_\mu v_\mu\right]^2\langle\mu|\hat{Q}|\mu\rangle\frac{\partial\lambda}{\partial a} + \frac{\left[u_\mu^2 - v_\mu^2\right]}{2E_\mu'}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a}\frac{\partial\lambda}{\partial a}$$
$$+\left[\frac{u_\mu^2 - v_\mu^2}{16\Delta^2}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a}\right]^2 + \frac{\left[u_\mu^2 - v_\mu^2\right]}{2E_\mu'}\langle\mu|\hat{Q}|\mu\rangle\frac{\partial\Delta^2}{\partial a}\Big\}$$

Dieser Ausruck R ist somit ein Maß dafür, wie gut die BCS-Wellenfunktionen die exakten Eigenfunktionen von H(a) annähern. Schätzt man die Größe dieser Restterme (VIII,9) ab, dann kann man alle Terme, die proportional zu $\frac{\partial\lambda}{\partial a}$ sind, vernachlässigen, denn λ hängt kaum von a ab. Die verbleibenden zwei Terme enthalten die Funktionen $\frac{\partial\Delta^2}{\partial a}$ und $\left[u_\mu^2 - v_\mu^2\right]$. Da nun der Gap Δ bei Änderungen von a stark variiert (Fig. 3a), können diese Ableitungen $\frac{\partial\Delta^2}{\partial a}$ große Werte annehmen. Die Funktion der Besetzungswahrscheinlichkeiten u_μ^2, v_μ^2 wird in der engen Umgebung der Fermikante so klein, daß man nur in diesem Bereich diese letzten beiden Terme von R (VIII,9) auch vernachlässigen kann. In den Randgebieten des Wirkungsbereiches der Paarkraft (siehe dazu B,III) dagegen strebt $\left[u_\mu^2 - v_\mu^2\right]$ dem Wert±1 zu, und deshalb liefern auch die Restterme (VIII,9) bei der Berechnung der kollektiven Masse mit der Beziehung (VIII,6) einen nicht verschwindenden Beitrag. Diese hier theoretisch abgeleiteten Beziehungen werden durch Vergleichsrechnungen von Sobiczewski 31) bestätigt, der feststellte, daß der Unterschied zwischen (VIII,6) und (VIII,7) bis zu 1o% betragen kann. Man sieht nun, daß die BCS-Wellenfunktionen um so besser die exakten Eigenfunktionen von H(a) approximieren, je näher die Zustände an der Fermikante liegen. Diese Eigenschaft ist in Einklang mit den Überlegungen (siehe Anhang B,III), daß es physikalisch notwendig ist, die Reichweite der Paarkraft zu beschränken.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß im Cranking-Modell die Restterme (VIII,9) der Paarvibrationen aus Konsistenzgründen verworfen werden müssen, da man bereits bei der Störungsrechnung die Annahme macht, daß die BCS-Wellenfunktionen die exakten Eigenfunktionen von $H'(a)$ sind. Würde man diese Annahme in Hinblick auf (VIII,9) nicht treffen, dann müßte man bei der Entwicklung der Grundzustandswellenfunktion ψ_0 die Näherungseigenschaften der BCS-Wellenfunktionen berücksichtigen. Da dies aber aus numerischen Gründen vermieden wird, ist es dann später bei der Umformung der Matrixelemente aus Konsistenzgründen notwendig, ebenso die BCS-Wellenfunktionen als die exakten Eigenfunktionen von $H'(a)$ anzunehmen. Damit ergibt sich im Cranking-Modell für die kollektive Energie ein eindeutiger Ausdruck, denn (VIII,7) und (VIII,6) sind dann identisch.

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Paarvibrationen deshalb so ausführlich untersucht, da bei der vorliegenden Arbeit in der kollektiven Energie die diagonalen Anteile der Paarvibrationen enthalten sind, die Restterme (VIII,9) dagegen fehlen (d.h. die Massenfunktionen $B_2^f(\mu)$ (VI,4) und (VI,6) stimmen mit (VIII,3) überein). Beschränkt man sich auf die zweite Ordnung der kollektiven Energie, mag man versucht sein, einen solchen 10%-Effekt zu tolerieren, wie dies in vielen Arbeiten 15), 20), 31) geschieht. Da in dieser Arbeit aber die kollektive Energie bis in 4. Ordnung berechnet wird, ist dies nicht möglich.

Der Grund dafür, daß die Restterme (VIII,9) bei der kollektiven Energie (VI,2) fehlen, ist, daß bei den Ansätzen (III,2) und (III,4) der Schalenmodellanteil H_{def} (III,4a) nur von dem statischen Deformationsparameter $\bar{\varepsilon}_\nu$ abhängt, und somit H_{def} keine implizite Zeitabhängigkeit enthält. Aus diesem Grund muß man in dieser Arbeit keine "adiabatische Störungsrechnung" durchführen, sondern kann die übliche zeitabhängige Störungsrechnung benutzen. Dabei wird die Grundzustandswellenfunktion

Ψ_o(IV,3), deren zeitabhängige Komponenten der kollektiven Parameter ausschließlich von dem Störterm herrührt, nach den BCS-Wellenfunktionen entwickelt. Die Adiabasieannahme wird erst später bei der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten der Wellenfunktion Ψ_o (IV,3) benötigt, um die bei der Auswertung der Integrale (IV,1oa) entstehenden höheren Ableitungen der kollektiven Parameter $\ddot{\varepsilon}$, $\dddot{\varepsilon}$ ... vernachlässigen zu können. Es ist bemerkenswert, daß in nahezu allen Arbeiten, die auf dem Cranking-Modell basieren, bei der Verwendung der Schrödinger-Gleichung in der "adiabatischen Störungsrechnung" auch diese höheren Ableitungen der kollektiven Koordinaten entstehen. Auf diese Terme wird aber nicht eingegangen und offensichtlich nimmt man auch dort an, daß durch die Adiabasieannahme diese vernachlässigbar klein werden. Im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Arbeiten wurde von W. Greiner und W. Scheid 34) ein Ansatz des kollektiven Hamilton-Operators ausgearbeitet, der die zweite zeitliche Ableitung der kollektiven Koordinaten mit Hilfe der Bewegungsgleichungen durch die Koordinate selbst und deren erste Ableitung ausdrückt. Weiterhin wird dort auch auf die 4. Ordnungsterme der kollektiven kinetischen Energie ($\sim \dot{a}^4$) eingegangen.

IX Numerische Berechnung der kollektiven Energie des Kernes Erbium

Für die numerische Durchführung der hier entwickelten Theorie zur Berechnung der kollektiven Energie wurde aus den Seltenen Erden der Kern $_{68}Er^{98}$ ausgewählt. Die Wahl fiel auf diesen Kern, da sein Energiespektrum ihn durch eine ausgeprägte Rotationsgrundzustandsbande und eine ebenso gut ausgebildete γ-Bande als einen typischen deformierten Kern ausweist 24). Man kann deshalb davon ausgehen, daß ein Vergleich des theoretisch berechneten und des gemessenen Spektrums klar anzeigt, wie gut die kollektiven Eigenschaften dieses Kernes von dem hier entwickelten Modell beschrieben werden.

Dieser Vergleich wird wie folgt durchgeführt. Zuerst werden aus der mikroskopisch berechneten Energie E_0' (VI,2) die für $_{68}Er^{98}$ charakteristischen Modellkonstanten B_i und C_i der kollektiven H-Funktion (I,3) berechnet. Mit diesen Konstanten wird durch ein Diagonalisierungsprogramm, das von G. Gneuß 6) entwickelt und von L. v. Bernus erweitert wurde, das kollektive Spektrum berechnet.

Führt man dieses Konzept durch, dann erhält man aus den Potentialfunktionen $\mathcal{L}_i'(\mu\cdots)$ (E,6) einen Satz von Potentialkonstanten C_i, die zwar zu der PES eines deformierten Kernes führt , aber die Grundzustandsdeformation liegt bei beiden Ansätzen H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) in den verschiedenen Darstellungen immer im Intervall ($0.05 \leq \bar{a}_0 \leq 0.15$), während bei der Deformation $\bar{a}_0 \approx 0.3$ die PES bereits über 30 MeV groß ist §. Diese unphysikalisch steilen Potentialtöpfe werden auch nicht durch eine extrem große Stärke $\varkappa'$ der Q-Q-Kraft realistischer, da gerade der steile Anstieg der PES wesentlich durch die Potentialkonstanten höherer Ordnung verursacht wird, dort aber die Stärke der Q-Q-Kraft keine große Wirkung mehr zeigt (VI,4), (E,1).

Anmerkung: § Die experimentell ermittelte Grundzustandsdeformation von $_{68}Er^{98}$ liegt bei $\bar{a}_0 \simeq 0.3$.

Dieser Mangel der Potentialfunktionen $\mathcal{E}_2^1(\mu\cdots)$ (E,6) hat seinen Grund darin, daß die Coulombkraft nicht ausreichend in dem Schalenmodellansatz berücksichtigt werden konnte. Es werden dort zwar für die Protonen und Neutronen unterschiedliche Nilsson-Parameter $\varkappa, \mu, \hbar\omega_0$ (B,9) eingeführt, die die nichtdiagonalen Matrixelemente der Coulombkraft simulieren, aber der diagonale Anteil, der bei der PES voll zur Geltung kommt, fehlt. Da es schwierig ist, und bisher auch noch nicht befriedigend durchgeführt wurde, ein Einteilchenmodell mit der Coulombkraft zu lösen, behilft man sich damit, daß die diagonalen Anteile durch die klassische Coulombenergie berücksichtigt werden. Diese Alternative ist zwar für die Potentialfunktionen $\mathcal{E}_2^1(\mu\cdots)$ (E,6) nicht brauchbar, wurde aber für den statischen Anteil der kollektiven Energie $\mathcal{E}_0$ (VI,3) mit Erfolg durchgeführt 21). Auf diese Art kann man die Grundzustandsdeformation, die Deformationstiefe und die Höhe der Spaltschwelle bestimmen. Da mit diesem Modell aber die Gesamtenergie des Kernes nicht richtig wiedergegeben wird, wurde von Strutinsky 25) ein Verfahren angegeben, bei dem aus $\mathcal{E}_0$ (VI,3) die Schalenkorrekturen extrahiert und zu einem klassischen Tröpfchenmodell hinzugefügt werden. Ein Vergleich dieser beiden Wege, die PES zu berechnen, ergab 28), daß die Verfahren in dem Bereich zwischen der oblaten und prolaten Spaltschwelle gleiche Ergebnisse zeigen, die Strutinsky-Renormierung jedoch jenseits der Spaltschwellen auch noch die PES realistisch beschreibt.

Da bei deformierten Kernen die Potentialkonstanten höherer Ordnung der H-Funktion (I,3) den Anstieg der PES wesentlich bestimmen können, wurde die PES von ${}_{68}Er^{98}$ mit dem Strutinsky-Verfahren berechnet (siehe Fig. 3a), wobei die Schalenkorrekturen aus $\mathcal{E}_0$(VI,3) gewonnen, und das Tröpfchenmodell von Myers und Swiatecki 26) benutzt wurde (Einzelheiten hierzu sind in 28) angegeben). Die daraus berechneten charakteristischen Potentialkonstanten C_i sind in der Tabelle und die daraus erhaltene PES in Fig. 4a und 4b angegeben.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich das Fehlen der diagonalen Matrixelemente der Coulombkraft bei der kinetischen kollektiven Energie auswirkt. Dieses Problem wurde bisher theoretisch noch nicht untersucht, man weiß lediglich aus Modellrechnungen, daß man mit verschiedenen Schalenmodellparametern für die Protonen und Neutronen brauchbare Ergebnisse erhalten kann. Dies ist offensichtlich auch in diesem Modell der Fall, denn wie sich später zeigen wird, ergeben die aus den Massenfunktionen $\mathcal{L}_\lambda^3(\mu\cdots)$ (E,6) berechneten Massenkonstanten B_i in Verbindung mit den Potentialkonstanten C_i, die aus $\mathcal{L}_0$ (VI,3) berechnet wurden, ein Energiespektrum, das mit dem gemessenen zufriedenstellend übereinstimmt (Fig. 1o).

Vergleicht man die Massenfunktionen $\mathcal{L}_\lambda^{II}(\mu\cdots)$ (E,6) in den Figuren 5a bis 5e des Ansatzes H^{II} (III,2) und $\mathcal{L}_\lambda^{III}(\mu\cdots)$ in den Figuren 5a, 6a bis 6d des Ansatzes H^{III} (III,4), die in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{\alpha}\}$ berechnet wurden, mit den entsprechenden Funktionen $\mathcal{L}_\lambda^2(\mu\cdots)$ in den Figuren 7a bis 7e und $\mathcal{L}_\lambda^3(\mu\cdots)$ in den Figuren 7a, 8a bis 8d in der Potentialdarstellung $\{\tilde{\varepsilon}\}$, dann stellt man fest, daß beide Ansätze H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) in derselben Darstellung weitgehend ähnliche Kurvenverläufe zeigen, während aber die analogen Massenfunktionen sich in den beiden Darstellungen $\{\tilde{\alpha}\}$ und $\{\tilde{\varepsilon}\}$ stark unterscheiden. Dieses Verhalten der Massenfunktionen wird verständlich, wenn man beachtet, daß einerseits die untersuchten Ansätze sich in ihrem physikalischen Gehalt ähneln [§], während andererseits die beiden Darstellungen $\{\tilde{\varepsilon}\}$ und $\{\tilde{\alpha}\}$ durch die komplizierten Transformationen $\tilde{\varepsilon} \to \tilde{q}$ (V,6), bei der Summen über die Q-Matrixelemente die Transformationsgleichungen bestimmen, und $\tilde{q} \to \tilde{\alpha}$ (V,1o), wo die Differentialquotienten $\frac{\partial q}{\partial \alpha}$ eingehen (VII,5), verknüpft sind. Deshalb ist es nahezu unmöglich, durch einfaches Vergleichen Schlüsse aus den Kurven zu ziehen.

Anmerkung: [§] Dies zeigt sich unter Anderem darin, daß in derselben Darstellung die Massenfunktionen 2. Ordnung übereinstimmen (Fig. 5a und Fig. 7a).

Die Interpretation einzelner Kurven von Massenfunktionen wird weiterhin dadurch erheblich erschwert, daß man im Gegensatz zu der PES bei der kollektiven kinetischen Energiefläche weitgehend auf die Anschaulichkeit verzichten muß. Denn wegen der kollektiven Geschwindigkeiten muß man in einem vierdimensionalen Raum argumentieren, wobei noch erschwerend hinzukommt, daß man bei der Größe der kollektiven Geschwindigkeit nur von Mittelwerten ausgehen kann.

Dennoch soll darauf hingewiesen werden, daß in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{\alpha}\}$ die Massenfunktionen $\mathcal{B}_{\nu}^{s}(\rho\cdots)$ (E,6) an den Extrema der PES eine ähnliche Struktur aufweisen (Fig. 5a bis Fig. 6d). So zeigen die Massenfunktionen aller Ordnungen in der Umgebung der Kugelgestalt des Kernes einen glatten Verlauf und nehmen dort, von Vorzeichen abgesehen, die kleinsten Werte an, während die Grundzustandsdeformation, aber auch der Sattelpunkt auf der oblaten Achse, durch große Schwankungen der kollektiven Massenfunktionen markiert werden. Trotz der oben angemerkten Vorbehalte ist man versucht, diese globalen Eigenschaften der Massenfunktionen mit Hilfe des Rot.-Vib.-Modelles 27) zu deuten. Dort wird das Trägheitsmoment J_o, das die Struktur des kollektiven Spektrums wesentlich bestimmt, mit der kollektiven Masse und dem Quadrat der Grundzustandsdeformation verknüpft. Geht man hiervon aus, dann ist es plausibel, daß die großen Werte der Massenfunktionen bei der Grundzustandsdeformation der PES eng mit der Rotationsstruktur des Spektrums korrelliert sind.

Um die physikalische Bedeutung der Massenfunktionen $\mathcal{B}_{\nu}^{s}(\rho\cdots)$ (E,6) zuüberprüfen, werden diese in Polynome der statischen Anteile der kollektiven Parameter $\{\tilde{\alpha}\}$ bzw. $\{\xi\}$ entwickelt, und durch einen Koeffizientenvergleich mit der kollektiven H-Funktion (F,2) erhält man die Massenkonstanten B_i, die im körperfesten Bezugssystem die kernspezifischen Eigenschaften der H-Funktion (I,3) bestimmen. Da die Klassifizierung der kollektiven Niveaus üblicherweise im Laborsystem erfolgt, werden die Massenkonstanten B_i mit der Transformation (A,7) in die P_i (A,6) transformiert.

Es wurde bereits im Abschnitt VI bei der Diskussion der kollektiven Energie E_o^{II} und E_o^{III} (VI,2) darauf hingewiesen, daß man bei dem Ansatz H^{III} (III,4), der als eine Erweiterung des Nilsson-Modelles angesehen werden kann, für die Darstellungen der kollektiven Koordinaten genau einen Satz der Massenkonstanten P_i erhält. Dies ist auch bei der Oberflächendarstellung $\{\tilde{a}\}$ des Ansatzes H^{II} (III,2) der Fall, während in der Potentialdarstellung $\{\tilde{\varepsilon}\}$ die Stärke $\varkappa'$ der Q-Q-Kraft in allen höheren Ordnungen der kollektiven Energie $E_o^{I}(\tilde{\varepsilon})$ (VI,4) wirkt, und deshalb hier eine explizite Abhängigkeit der Massenkonstanten P_i (i = 3,4,5) von $\varkappa'$ vorliegt (siehe Fig. 9a). Die Stärke von $\varkappa'$ wird dadurch festgelegt, daß für verschiedene Werte das Spektrum berechnet wird (Fig. 9a und 9b) und dann mit den gemessenen Niveaus von $_{68}Er^{98}$ verglichen wird. In der Fig. 9b kann man verfolgen, wie mit anwachsendem $\varkappa'$ die Level der Grundzustandsbande zusammenrücken, während der Kopf der γ-Bande nach oben und der 0^+ der β-Bande in dem Spektrum nach unten geschoben werden. Im Folgenden wurde $\varkappa' = 0.0005$ gesetzt, da mit diesem Wert die Grundzustandsbande der experimentell gemessenen am nächsten kommt §.

Bei der Berechnung dieser Spektren mit dem Satz der Massenkonstanten $P_i = P_i(\varkappa')$ zeigt sich, daß die P_5-Konstanten (siehe Tabelle), die aus den Massenfunktionen $\mathcal{L}_5^2(\mu\cdots)$ (E,6) berechnet wurden, die Spektren unrealistisch stark auseinander ziehen. Dies ist der Grund, warum diese berechneten P_5-Konstanten nicht verwendet werden. Dazu ist es notwendig zu wissen, daß die Spektren mit einem Programm berechnet werden 6), bei dem die Diagonalisierung der kollektiven H-Funktion unter der Voraussetzung entwickelt wurde, daß die kinetische Energie (I,3) nur die harmonische Näherung enthält (d.h. $B_3 = B_{4i} = B_5 = 0$). Mit dieser Annahme wurde (I,3) quantisiert und in einer fünfdimensionalen Oszillatorbasis diagonalisiert. Als es später notwendig wurde, die höheren Terme der kinetischen Energie zu berücksichtigen, wurde die Annahme gemacht, daß auch für diese erwei-

---

Anmerkung: § Für andere $\varkappa'$-Werte war die Basis des Diagonalisierungsprogrammes zu klein, um eine befriedigende Konvergenz zu erhalten.

terte H-Funktion die Quantisierungsvorschrift des harmonischen Ansatzes gelten soll. Dieses Vorgehen ist aber nur dann sinnvoll, wenn man annimmt, daß bei der Diagonalisierung die Quantisierungsvorschrift der erweiterten H-Funktion (I,3) sich von der bisher benutzten (harmonische kinetische Energie) im Wesentlichen nur um Zahlenfaktoren unterscheidet, und alle zusätzlichen Terme der Quantisierungsvorschrift, die die kollektiven Koordinaten selbst enthalten, vernachlässigt werden können. Wird nun diese spezielle Art der Diagonalisierung der H-Funktion (I,3) dazu benutzt, um durch Anpassung der Massen- und Potentialkonstanten B_i und C_i die gemessenen Spektren zu erklären, dann ist es unerheblich, daß die oben genannten Annahmen die Werte der Massen- und Potentialkonstanten verändern, zumal in jedem Fall die C_i und B_i-Konstanten durch die in dem Ansatz (I,3) nicht berücksichtigten höheren Terme (I,4) renormiert werden. Die Problematik dieser Methode, die kollektiven Energieniveaus zu berechnen, wird dann deutlich, wenn die Massen- und Potentialkonstanten in einem mikroskopischen Modell konsistent berechnet werden, wie es in dieser Arbeit durchgeführt wird. In diesen berechneten Konstanten sind offenbar keine der beiden Arten von Renormierungsfaktoren enthalten. Ist es nun einerseits der Zweck solcher mikroskopischen Rechnungen, den Einfluß der im Ansatz nicht berücksichtigten höheren Ordnungen zu bestimmen, so ist es andererseits dazu wünschenswert, diejenigen Faktoren zu eliminieren, die durch die Näherungen der Quantisierung bei der Diagonalisierung der H-Funktion (I,3) entstanden sind. Bei der hierzu notwendigen Quantisierung der vollständigen H-Funktion zeigt sich jedoch, daß diese bei den Termen der kinetischen Energie, die proportional $\alpha\dot{\alpha}^2$ und $\alpha^2\dot{\alpha}^2$ sind, theoretisch möglich ist 5), 35), aber für den Term $\dot{\alpha}^4$ die bekannten Quantisierungsverfahren nicht anwendbar sind. Unter diesem Aspekt ist es nun fraglich, ob die bei der Diagonalisierung von (I,3) gemachte Annahme auch für diese Terme ($\sim\dot{\alpha}^4$) zulässig ist.

Da die Quantisierung und damit die exakte Diagonalisierung der kollektiven H-Funktion (I,3) ein ungelöstes Problem ist, wurde in dieser Arbeit wie folgt vorgegangen: die mikroskopisch berechneten Konstanten C_i und B_i der H-Funktion (I,3) werden ohne Korrekturfaktoren dazu benutzt, um mit dem oben diskutierten Modell 6) die kollektiven Energieniveaus zu berechnen. Der Vergleich mit dem gemessenen Spektrum von $_{68}Er^{98}$ zeigt dann, in wieweit die speziellen Annahmen bei der Quantisierung der H-Funktion zutreffend sind, und wie groß der Einfluß der nicht berücksichtigten höheren Ordnungen in (I,3) ist.

Im Verlauf der Untersuchungen der verschiedenen Modellansätze und deren Darstellungen ergab sich, daß aus allen mikroskopisch berechneten Massenfunktionen $\mathcal{B}_5^5(\mu\nu\nu\nu)$ (E,6) für die Massenkonstante P_5 solche Werte berechnet werden, daß die kollektiven Spektren unrealistisch groß werden (der Abstand zwischen dem 2^+ und 0^+ Niveau ist größer gleich 5 MeV). Deshalb wurde der Einfluß dieses Termes der kollektiven Energie gesondert untersucht. Dabei wird von einer einfachen deformierten PES (siehe Tabelle) ausgegangen, und der P_2-Wert so gewählt, daß ohne höhere kinetische Terme der 2^+ der Grundzustandsbande und der Kopf der γ-Bande ungefähr mit den gemessenen Niveaus von $_{68}Er^{98}$ übereinstimmen. Es wurde dann für verschiedene P_5-Konstanten das Spektrum berechnet und in der Fig. 17a logarithmisch aufgetragen. Man sieht, daß alle Niveaus bei anwachsenden P_5-Werten fast gleichmäßig exponentiell größere Abstände zu dem 0^+ des Grundzustandes annehmen. Dabei ist bemerkenswert, daß das Levelschema verändert wird. Eine ähnliche Untersuchung wurde von L. v. Bernus 29) für die Massenkonstanten P_2 an einer deformierten PES durchgeführt. Dort wird festgestellt, daß mit wachsenden P_2-Werten das Spektrum stark gespreizt wird (alle höheren kinetischen Terme wurden Null gesetzt). Dabei beobachtet man die Umordnung der Energieniveaus von einem typischen Rotationsspektrum (kleine P_2-Werte) bis zu einem reinen Vibrationsspektrum (große P_2-Werte). Abschließend stellt sich die Frage, ob sich dieses weitgehend ähnliche Verhalten der Spektren

bei gleichzeitiger Variation der Konstanten P_2 und P_5 überlagert, oder ob sich eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Massenkonstanten in dem Spektrum zeigt. Man kommt zu dem Ergebnis, daß sich beide Effekte ohne merkliche Wechselwirkung addieren (Fig. 17b).

Zusammenfassend kann man feststellen, daß in der kinetischen kollektiven Energie (I,3) die Terme $\sim \dot{\alpha}^2$ und $\sim \dot{\alpha}^4$ sich in ihrer Wirkung auf das kollektive Spektrum gleichen. Bei diesen Ausführungen sei daran erinnert, daß die hier untersuchten Terme der kinetischen Energie der H-Funktion (I,3) bei der Diagonalisierung so behandelt wurden, als ob die Quantisierung der kinetischen Energie in harmonischer Näherung zuträfe. Es ist in Hinblick auf die Größe der mikroskopisch berechneten Massenkonstante P_5 (siehe Tabelle) und dem gleichartigen Einfluß der kinetischen Terme $\sim \dot{\alpha}^2$ und $\sim \dot{\alpha}^4$ auf das Spektrum zweifelhaft, ob dieser Annahme zutrifft.

Aus diesem Grund wurde im Folgenden bei der Berechnung der Spektren die mikroskopisch bestimmte P_5-Konstante nicht verwendet. Man konnte aber andererseits auf diesen Term der kinetischen Energie nicht ganz verzichten (d.h. $P_5 = 0$ setzen), da ohne ihn bei einigen Sätzen der Massenkonstanten P_i bei der numerischen Diagonalisierung der H-Funktion keine Konvergenz zu erreichen ist. In solchen Fällen wurde der P_5-Term an dem 2^+-Niveau der Grundzustandsbande von ${}_{68}Er^{98}$ angepaßt.

Die Massenkonstanten P_i, die man aus den Ansätzen H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) in der Potential- und Oberflächendarstellung erhält, sind in der Tabelle angegeben. Bei den damit berechneten Spektren wurde, außer bei dem Parametersatz, den man aus H^{II} in der Potentialdarstellung als Funktion der Stärke $\varkappa'$ der Q-Q-Kraft erhält (siehe Fig. 9a und 9b), die P_5-Konstante, wie oben beschrieben, angepaßt. In der Figur 1o sind die vier Spektren angegeben, die mit den Massenkonstanten P_2, P_3, P_4, und Potentialkonstanten C_i aus den Ansätzen H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) berechnet wurden.

Alle vier Spektren zeigen übereinstimmend eine Rotationsgrundzustandsbande, eine vollständige γ-Bande und den 0^+ der β-Bande. Vergleicht man die einzelnen Spektren mit dem Experiment, dann findet man, daß in dem Spektrum I, welches mit dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{\alpha}\}$ berechnet wurde, der 4^+-Zustand der Grundzustandsbande etwas, der 6^+ aber stark von dem $I(I+1)$ - Gesetz abweicht. Die relative Lage der γ-Bande zu dem 6^+ der Grundzustandsbande wird richtig wiedergegeben, ebenso wie die Position des 0^+-Zustandes der β-Bande relativ zu der γ-Bande. Das gleiche gilt für das Spektrum II, das mit dem Ansatz H^{III} (III,4) in der Oberflächendarstellung berechnet wurde. Dort liegt aber der 0^+ der β-Bande noch tiefer als in dem Spektrum I. Bemerkenswert ist der übermäßig starke Einfluß der Zustände mit geradem Drehimpuls in der β- und γ-Bande aufeinander (even-odd-staggering und der $\dot{\alpha}^4$-Term der kinetischen Energien). Dies ist wohl auch der Grund für die Störung des $I(I+1)$-Gesetzes in der Grundzustandsbande. Betrachtet man das Spektrum IV, das mit dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Potentialdarstellung als Funktion der Stärke χ' der Q-Q-Kraft berechnet wurde (Fig. 9a, 9b), dann findet man, daß in der Grundzustandsbande für den 2^+ und 4^+-Zustand das $I(I+1)$-Gesetz sehr gut erfüllt ist, während der 6^+ offensichtlich durch die zu tief liegende β-Bande abgesenkt wird. Auch hier ist die relative Lage der γ-Bande bezüglich des 6^+ gut wiedergegeben, und im Gegensatz zu den Spektren I und II ist hier der Levelabstand und -folge innerhalb der γ-Bande in Übereinstimmung mit dem Experiment. Das Spektrum III, das mit dem Ansatz H^{III} (III,4) in der Potentialdarstellung berechnet wurde, hat eine ähnliche Struktur wie IV, aber durch das starke Absinken des 0^+-Niveaus der β-Bande wird die Grundzustandsbande stark gestört.

Zu den Massenkonstanten des Spektrums IV ist noch nachzutragen, daß mit Absicht eine solche Stärke χ' der Q-Q-Kraft gewählt wurde (Fig. 9a, 9b) die es ermöglicht, $P_5 = 0$ zu setzen. Wählt man $\chi' = 0.00085$, dann erhält man ähnliche Massenkonstanten wie bei

dem Spektrum III, muß aber dann, um in der beschränkten Diagonalisierungsbasis eine Konvergenz zu erhalten, die P_5-Konstante einschalten. Es soll hiermit gezeigt werden, daß die globale Struktur der berechneten Spektren nicht stark von der speziellen Wahl der P_5-Konstanten abhängt, da diese viel kleinere Werte annehmen, als jene, die mikroskopisch berechnet werden.

Um einen Überblick zu erhalten, wie sich die Wirkung der einzelnen Terme der kinetischen Energie in den Spektren zeigt, wurde bei jedem der oben beschriebenen Spektren (Fig. 1o) die einzelnen P-Terme gesondert und in Kombinationen "eingeschaltet" (Fig. 11a bis 14b). Dabei stellt sich heraus, daß in den Spektren I und II der Fig. 1o die große negative P_{4o}-Konstante das gesamte Spektrum stark verdichtet (Fig. 11 und 12). Dadurch werden die Wirkungen der restlichen Terme auf die Spektren I, II nahezu überdeckt. In den Spektren III und IV (Fig. 1o) tritt kein solcher dominierender Term auf und man stellt fest, daß sich die Einflüsse der höheren Terme der kinetischen Energie der H-Funktion (I,3) nicht addieren, sondern eine unterschiedlich starke Wechselwirkung zwischen den einzelnen Niveaus besteht.

In einer Studie, bei der für alle P_{4i}-Konstanten der gleiche Wert angenommen wurde (Fig. 15 und 16), kann festgestellt werden, daß die P_{4o}-Konstante relativ zu den Änderungen der P_{42}- und P_{44}-Konstanten das Spektrum am stärksten beeinflussen - d.h. bei positivem Vorzeichen das Spektrum dehnen und bei negativem stauchen. Zufällig ergaben sich bei dieser Untersuchung drei Kombinationen der P_{4i}-Konstanten, die eine recht gute Übereinstimmung mit dem Spektrum von $_{68}Er^{98}$ zeigen (siehe Fig. 15e).

Über die Wirkung der 4. Ordnungsterme der kollektiven kinetischen Energie (I,3), die proportional $\dot{\alpha}^4$ sind, wurde bereits berichtet (siehe Fig. 17a und 17b) und es ist hier noch nachzutragen, daß die anormale Reihenfolge der Level mit geraden Drehimpulsen in der γ-Bande der Spektren I und II der Fig. 1o neben dem even-odd-staggering-Effekt auch von den P_5-Termen der kinetischen

Energie verursacht wird (siehe dazu Fig. 11a und 14a).

Zusammenfassend ist zu dem Vergleich der hier berechneten Spektren I bis IV mit den gemessenen Energieniveaus zu bemerken, daß die aus den Ansätzen H^{II} (III,2) und H^{III} (III,4) mikroskopisch berechneten Massen- und Potentialkonstanten C_i ind P_i mit Ausnahme von P_5 das Spektrum von $_{68}Er^{98}$ gut bestimmen. Dabei ist anzumerken, daß Modellparameter, die bei dem Schalenmodell benötigt werden, entweder der Literatur entnommen wurden (Nilsson-Parameter (B,9)), oder an experimentellen Daten (der Gap an der even-odd-Massendifferenz) bestimmt worden sind. Insbesondere zeigt sich, daß der Ansatz H^{II} (III,2), der in dem Störterm die zeitabhängigen Anteile der Q-Q-Kraft enthält, die beste Übereinstimmung in beiden Darstellungen der kollektiven Koordinate mit dem Experiment ergibt (siehe Fig. 1o und Tabelle). Zu der speziellen Annahme, daß sich der Einfluß der exakten Quantisierung der H-Funktion (I,3) im Wesentlichen nur durch Zahlenfaktoren bei der Diagonalisierung von derjenigen unterscheidet, wenn die H-Funktion nur die kinetischen Terme 2. Ordnung enthält, ist zu sagen, daß dies nur für die Terme zulässig ist, die proportional $\alpha\dot{\alpha}^2$ und $\alpha^3\dot{\alpha}^2$ sind. Dieser Schluß wird auch durch die Spektren der Fig. 15e unterstützt, da dort allein die Massenkonstanten P_{4i} eine entscheidende Verbesserung bei der Übereinstimmung des Spektrums mit den gemessenen Niveaus ergeben.

Der Fragenkomplex, der den Term der kinetischen Energie betrifft, die proportional zu $\dot{\alpha}^4$ ist, kann nicht eindeutig geklärt werden. Denn einerseits benötigt man diesen Term, um die Konvergenz des Diagonalisierungsverfahrens bei einigen konstanten Sätzen P_i zu erreichen, wobei allerdings erheblich kleinere P_5-Konstanten benötigt werden, als mikroskopisch ausgerechnet werden. Andererseits kann dieser Term die Reihenfolge der Niveaus in der γ-Bande zu stark mischen (siehe Spektrum I, II der Fig. 1o), die bei fehlender oder schwacher P_5-Konstanter durch die anderen höheren Terme der kinetischen Energie gut wiedergegeben werden (Spektrum IV in Fig. 1o und Spektren in Fig. 15e). Aus diesem Grund ist es auch nicht möglich, den Einfluß der höheren kinetischen Terme, die in der H-Funktion (I,3) nicht berücksichtigt worden sind, abzuschätzen.

X Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist gezeigt worden, wie es durch die Verwendung von mikroskopischen Ansätzen möglich ist, die kollektive Energie des Grundzustandes zu bestimmen. In dem Modell wird die Dynamik des kollektiven Massenflusses in zwei Ansätzen, durch ein zeitabhängiges Quadrupolfeld und den zeitabhängigen Anteil der Q-Q-Kraft auf der Basis eines Nilsson-Ansatzes mit der Paarkraft in der BCS-Näherung als Restwechselwirkung, beschrieben. Aus dem Energieerwartungswert des Grundzustandes werden die Massen- und Potentialkonstanten der kollektiven H-Funktion (I,3) berechnet. Bei einem Vergleich mit anderen Theorien, die von dem Cranking-Modell ausgehen, wird gezeigt, daß in dem hier entwickelten Modell der Einfluß der Paarvibrationen konsistent berücksichtigt wird.

Die numerische Durchführung für den Kern $_{68}Er^{98}$ ergibt, daß beide Ansätze die kollektiven Eigenschaften gut beschreiben. Dabei stellt sich heraus, daß der Ansatz, der die zeitlich veränderlichen Anteile der Q-Q-Kraft enthält, eine bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Energiespektren ergibt. Wie zu erwarten war, sind beide Darstellungen der kollektiven Koordinaten - die Potentialkoordinaten, die eng mit den Deformationsparametern des Schalenmodellpotentials verknüpft sind, und die Oberflächenkoordinaten, die durch die Koeffizienten der Radiusentwicklung definiert werden - in Bezug auf die berechneten Potential- und Massenkonstanten der H-Funktion gleichwertig. Es ist aber die Oberflächendarstellung vorzuziehen, da damit die physikalische Interpretation der Massenfunktionen der kollektiven Energie erleichtert wird. Im Verlauf der Rechnung stellt sich heraus, daß man aus den Potentialfunktionen keine realistischen Potentialkonstanten gewinnt. Der Grund dafür ist, daß in dem benutzten Schalenmodell die diagonalen Anteile der Coulomb-Kraft, die wesentlich die PES bestimmen, nicht ausreichend berücksichtigt werden konnten. Deshalb wurde die PES mit dem Strutinsky-Verfahren bestimmt, wobei die Schalenkorrekturen aus dem statischen Anteil des Energieerwar-

tungswertes des Grundzustandes berechnet werden. Die kinetische Energie der kollektiven H-Funktion kann im Gegensatz zu der potentiellen Energie gut mit den Massenfunktionen, die durch den Energieerwartungswert definiert werden, beschrieben werden.

Bei dem Vergleich der mikroskopisch berechneten Massen- und Potentialkonstanten (I,3) mit den experimentellen Energieniveaus von $_{68}Er^{98}$ mußte bei der Diagonalisierung eine Annahme bezüglich der Quantisierung der hier benutzten kollektiven H-Funktion getroffen werden, die es verhindert, den physikalischen Gehalt von dem Term der kinetischen Energie eindeutig zu untersuchen, der den kollektiven Impuls in der 4. Potenz enthält. Sieht man von diesem Term ab, dann wird in dieser Arbeit gezeigt, daß die kernspezifischen Modellkonstanten der kollektiven H-Funktion (I,3) durch die hier behandelten mikroskopischen Ansätze gut bestimmt werden können. Dabei ist bei dem Vergleich der berechneten Spektren mit dem gemessenen von $_{68}Er^{98}$ zu bedenken, daß die Modellparameter nicht in Hinblick auf die gemessenen Niveaus angepaßt wurden, sondern die Schalenmodellparameter wurden aus der Literatur entnommen und die Parameter der Paarkraft an den even-odd-Massendifferenzen bestimmt.

A,I Transformation der Hamilton-Funktion $H(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ vom Laborsystem in das körperfeste Bezugssystem

Die kollektiven Koordinaten der H-Funktion (I,2) sind in diesem Modell Komponenten des Tensors 2. Stufe und werden im Laborsystem mit α_μ und im körperfesten System mit $\tilde{a}_\mu$ bezeichnet. Wählt man für das Koordinatensystem der $\tilde{a}_\mu$ die Hauptachsen des Kernes, dann gelten die Beziehungen (II,1)

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_{-2} \quad ; \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_{-1} = 0 \,,$$

wobei die Transformationsgleichung (II,2)

$$\tilde{a}_\nu = \sum_\mu \alpha_\mu \, \mathcal{D}^2_{\mu\nu}(\Theta_i)$$

gilt. Diese Transformation mit den Kreiselfunktionen D^K_{IM} und ihre Auswirkungen auf die Eindeutigkeit der Wellenfunktionen in beiden Bezugssystemen wird ausführlich in 5), 6) behandelt.

Das Potential (I,3b) hat im körperfesten Bezugssystem die Form (A,1)

$$\begin{aligned} V(\tilde{a}_\mu) = {} & C_2 [\hat{a}\times\hat{a}]^0 + C_3 [\hat{a}\times\hat{a}\times\hat{a}]^0 + C_4 [[\hat{a}\times\hat{a}]^0 \times [\hat{a}\times\hat{a}]^0]^0 \\ & + C_5 [[\hat{a}\times\hat{a}]^0 \times [\hat{a}\times\hat{a}\times\hat{a}]^0]^0 + C_6 [[\hat{a}\times\hat{a}\times\hat{a}]^0 \times [\hat{a}\times\hat{a}\times\hat{a}]^0]^0 \\ & + D_6 [[\hat{a}\times\hat{a}]^0 \times [\hat{a}\times\hat{a}]^0 \times [\hat{a}\times\hat{a}]^0]^0 \end{aligned}$$

Es wurde hier die verdichtete Schreibweise (I,3c) benutzt. Setzt man in (A,1) die Komponenten $\tilde{a}_\nu$ von $\hat{a}$ ein, dann erhält man (A,2)

$$\begin{aligned} V(\tilde{a}_\mu) = {} & C_2 \tfrac{1}{\sqrt{6}} [\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_2^2] + C_3 \sqrt{\tfrac{2}{35}} [\hat{a}_0 (6\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_0^2)] + C_4 \tfrac{1}{5} [\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_2^2]^2 \\ & + C_5 \sqrt{\tfrac{2}{175}} [(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_2^2)\tilde{a}_0 (6\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_0^2)] + C_6 \tfrac{2}{35} [\hat{a}_0 (6\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_0^2)]^2 \\ & + D_6 \tfrac{1}{5\sqrt{5}} [\tilde{a}_0^2 + \tilde{a}_2^2]^3 \end{aligned}$$

Die kinetische Energie (I,3a) spaltet in einen Rotations- und einen Vibrationsanteil auf (II,4).

$$T(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu, \mathcal{B}_\lambda) \longrightarrow T^1_{rot} + T^2_{rot} + T^1_{vib} + T^2_{vib}$$

$$T^1_{rot} = \sum_{\varkappa=1}^{3} J_\varkappa (\dot{\tilde{a}}_\nu, \tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_\lambda) \, \omega_\varkappa^2 \quad ; \quad T^2_{rot} = \sum_{\varkappa=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{2} I_{\varkappa\varrho} (\tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_5) \, \omega_\varkappa^2 \, \omega_\varrho^2$$

$$T^1_{vib} = \sum_{\mu\nu} M_{\mu\nu} (\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu, \mathcal{B}_\lambda) \dot{\tilde{a}}_\mu \dot{\tilde{a}}_\nu \quad ; \quad T^2_{vib} = \sum_{\mu\nu} N_{\mu\nu} (a_\mu, a_\nu, \mathcal{B}_6) \dot{\tilde{a}}_\mu \dot{\tilde{a}}_\mu \dot{\tilde{a}}_\nu \dot{\tilde{a}}_\nu$$

Die Trägheitsmomente J_x und I_{xy} haben die Form (A,3)

$$J_1 = [\bar{B}_1 + \bar{B}_3(16\tilde{a}_1^2 - \tilde{a}_0^2) + \bar{B}_{40}(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_1^2) + \bar{B}_{42}(\tilde{a}_0^2 + 476\tilde{a}_0\tilde{a}_2 - 2\tilde{a}_1^2) - \bar{B}_{44}(3\tilde{a}_0^2 + \tfrac{5}{2}16\tilde{a}_0\tilde{a}_2 + \tilde{a}_1^2) + \bar{B}_5(\dot{\tilde{a}}_0^2 + 2\dot{\tilde{a}}_2^2)]\cdot\alpha$$

$$J_2 = [\bar{B}_2 - \bar{B}_3(16\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_0^2) - \bar{B}_{40}(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_1^2) - \bar{B}_{42}(\tilde{a}_0^2 - 476\tilde{a}_0\tilde{a}_2 - 2\tilde{a}_1^2) + \bar{B}_{44}(3\tilde{a}_0^2 - \tfrac{5}{2}16\tilde{a}_0\tilde{a}_2 + \tilde{a}_1^2) - \bar{B}_5(\dot{\tilde{a}}_0^2 + 2\dot{\tilde{a}}_1^2)]\cdot\beta$$

$$J_3 = [\bar{B}_2 + \bar{B}_3(\quad \tilde{a}_0^2) + \bar{B}_{40}(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_1^2 - 2\bar{B}_{42}(\tilde{a}_0^2 \quad -2\tilde{a}_1^2) + \tfrac{1}{4}\bar{B}_{44}(3\tilde{a}_0^2 \quad -34\tilde{a}_2^2) + \bar{B}_5(\dot{\tilde{a}}_0^2 - 2\dot{\tilde{a}}_1^2)]\cdot\gamma$$

$$I_{11} = \tfrac{1}{2}\bar{B}_6\,\alpha\alpha \qquad I_{22} = \tfrac{1}{2}\bar{B}_5\,\beta\beta \qquad I_{12} = -\tfrac{1}{2}\bar{B}_5\,\alpha\beta$$

$$I_{23} = -\tfrac{1}{5}\bar{B}_5\,\beta\gamma \qquad I_{13} = \tfrac{1}{2}\bar{B}_6\,\alpha\gamma \qquad I_{31} = I_{13}$$

$$I_{21} = I_{12} \qquad I_{32} = I_{23}$$

Es wurden die folgenden Abkürzungen in (A,3) benutzt:
(A,3a)

$$\mathcal{A} = [3\tilde{a}_0^2 + 2\sqrt{6}\,\tilde{a}_0\tilde{a}_2 + 2\tilde{a}_2^2]$$

$$\mathcal{L} = [3\tilde{a}_0^2 - 2\sqrt{6}\,\tilde{a}_0\tilde{a}_2 + 2\tilde{a}_2^2]$$

$$\mathcal{C} = [\qquad\qquad 8\tilde{a}_2^2]$$

$$\bar{B}_2 = 2B_2 \qquad \bar{B}_3 = \sqrt{\tfrac{2}{35}}\,B_3 \qquad \bar{B}_{40} = \tfrac{1}{5}B_{40}$$

$$\bar{B}_{42} = \tfrac{\sqrt{5}}{7}B_{42} \qquad \bar{B}_{44} = \tfrac{12}{35}B_{44} \qquad \bar{B}_5 = \tfrac{2}{5}B_5$$

Die Massenfunktionen $M_{\mu\nu}$ und $N_{\mu\nu}$ des Vibrationsanteiles der kinetischen Energie (II,4) haben die Form
(A,4)

$$M_{00} = [\tfrac{1}{2}\bar{B}_2 - \bar{B}_3\tilde{a}_0 + \bar{B}_{40}(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_2^2) + 2\bar{B}_{42}(\tilde{a}_0^2 - 2\tilde{a}_2^2) + \tfrac{3}{2}\bar{B}_{44}(3\tilde{a}_0^2 + \tilde{a}_2^2)]$$

$$M_{22} = [\bar{B}_2 + 2\bar{B}_3\tilde{a}_0 + 2\bar{B}_{40}(\tilde{a}_0^2 + 2\tilde{a}_2^2) - 4\bar{B}_{42}(\tilde{a}_0^2 - 2\tilde{a}_2^2) + \tfrac{1}{2}\bar{B}_{44}(3\tilde{a}_0^2 + 71\tilde{a}_2^2)]$$

$$M_{02} = [\quad +2\bar{B}_3\tilde{a}_2 \qquad\qquad +16\bar{B}_{42}(\tilde{a}_0\tilde{a}_2) + 15\bar{B}_{44}(\tilde{a}_0\tilde{a}_2)]$$

$$M_{20} = M_{02}$$

$$N_{00} = \tfrac{1}{2}\bar{B}_5 \qquad N_{02} = \bar{B}_5 \qquad N_{22} = 2\bar{B}_5$$

$$N_{20} = N_{02}$$

A,II Die kollektive Hamilton-Funktion in der kanonisch konjugierten Darstellung

In der Gleichung (I,3) von $H(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$ sind α_μ und $\dot{\alpha}_\mu$ keine kanonisch konjugierten Variablen und deshalb nicht zur Quantisierung geeignet. Man erhält die zu α_μ kanonisch konjugierten Impulse π_μ mittels des Lagrange-Formalismus.

$$\pi_\mu^{\sim} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_\mu} L(\dot{\alpha}_\mu, \alpha_\mu)$$

Dabei ist $\pi_\mu^{\sim}$ kontravariant zu α_μ. In der harmonischen Näherung gilt, daß π_μ proportional zu $\dot{\alpha}_\mu$ ist. Die 3. und weitere Näherungen werden durch iteratives Einsetzen in die höheren Terme von (I,3) erhalten 7). Führt man dies durch, dann erhält man konsistent bis in 4. Ordnung

(A,5)

$$\dot{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2B_2}\Big[\sqrt{5}\,\hat{\pi} - B_3\big([\dot{\hat{\alpha}}\times\hat{\alpha}]^2 + [\hat{\alpha}\times\dot{\hat{\alpha}}]^2\big) - \sum_j B_{4j}\big([\dot{\hat{\alpha}}\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^j]^2 + [[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^j\times\dot{\hat{\alpha}}]^2\big)\Big]$$

$$-\frac{1}{2B_2}\Big[2B_5\big([\dot{\hat{\alpha}}\times[\dot{\hat{\alpha}}\times\hat{\alpha}]^0]^2 + [[\dot{\hat{\alpha}}\times\hat{\alpha}]^0\times\dot{\hat{\alpha}}]^2\big)\Big]$$

Durch wiederholtes Einsetzen von (A,5) in (I,3a) und durch Umkoppeln erhält man

(A,6)

$$H(\hat{\pi},\hat{\alpha}) = P_2[\hat{\pi}\times\hat{\pi}]^0 + P_3[\pi\times\hat{\alpha}\times\pi]^0 + \frac{1}{2}\sum_j P_{4j}\Big\{\big[[\hat{\pi}\times\pi]^j\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^j\big]^0 + \big[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^j\times[\hat{\pi}\times\hat{\pi}]^j\big]^0\Big\}$$

$$+P_5\big[[\hat{\pi}\times\pi]^0\times[\hat{\pi}\times\hat{\pi}]^0\big]^0$$

$$+C_2[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0 + C_3[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0 + C_4\big[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\big]^0$$

$$+C_5\big[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\big]^0 + C_6\big[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\big]^0$$

$$+D_6\big[[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\times[\hat{\alpha}\times\hat{\alpha}]^0\big]^0$$

Dabei gilt zwischen den Konstanten P_i von (A,6) und den B_i von (I,3a)

(A,7)

$$P_2 = \frac{5}{4B_2} \qquad P_3 = -\frac{5B_3}{4B_2B_2} \qquad P_5 = -\frac{75B_5}{16B_2B_2B_2B_2}$$

$$P_{4j} = -\frac{10B_{4j}}{8B_2B_2} + \frac{5\sqrt{5}B_3B_3}{8B_2B_2B_2}\sqrt{2j+1}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&j\end{Bmatrix}$$

Das 6-j Symbol wurde in der Konvention von 22) gewählt. Die Potentialkonstanten C_i bleiben in beiden Formen der kollektiven Hamilton-Funktion unverändert.

B,I Der Schalenmodellansatz

Der Hamilton-Operator $H_{Nilsson}$ des Schalenmodelles wird wie bei 18) gewählt.

(B,1)

$$H_{Nilsson} = \frac{-\hbar^2}{2m}\sum_i \Delta_i' + \sum_i \frac{m}{2}\left[\omega_x^2 x_i'^2 + \omega_y^2 y_i'^2 + \omega_z^2 z_i'^2\right] + C\vec{l}_i'\vec{s}_i + D\left[\vec{l}_i'^2 - \langle\vec{l}'^2\rangle_N\right]$$

Abweichend von dem üblichen Nilsson-Ansatz wird der Zusammenhang der Oszillatorfrequenzen ω_i mit den kollektiven Parametern wie folgt definiert 23).

(B,2)

$$\omega_x = \omega_0 f_x \qquad f_x = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\bar{\varepsilon}_0 + 2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\bar{\varepsilon}_2}$$

$$\omega_y = \omega_0 f_y \qquad f_y = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\bar{\varepsilon}_0 - 2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\bar{\varepsilon}_2}$$

$$\omega_z = \omega_0 f_z \qquad f_3 = \frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\bar{\varepsilon}_0}$$

Die Volumenerhaltung der Äquipotentialflächen wird durch die Nebenbedingung

(B,3)

$$\omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z = \omega_0^3 = \text{constant}$$

erreicht. Durch diese Definition der Funktionen $f_i(\bar{\varepsilon}_0, \bar{\varepsilon}_2)$ wird in Verbindung mit der Volumenerhaltung festgelegt, daß in erster Ordnung die Äquipotentialflächen von $H_{Nilsson}$ mit den entsprechenden Massenverteilungen der Radiusentwicklung (III,7a) übereinstimmen. Eine Transformation von (B,1) auf gestreckte, dimensionslose Koordinaten

(B,4)

$$x' = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0 f_x}}\,x \quad ; \quad y' = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0 f_y}}\,y \quad ; \quad z' = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0 f_z}}\,z$$

gibt dem Schalenmodelloperator die Gestalt

(B,5)

$$H_{Nilsson} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left\{f_x\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right] + f_y\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2\right] + f_z\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2\right]\right\} + C\vec{l}\vec{s} + D\left[\vec{l}^2 - \langle\vec{l}^2\rangle_N\right]$$

Der Drehimpulsoperator $\vec{l}'$ wurde durch den entsprechenden Operator in dem (x,y,z) - Raum ersetzt. Diese Näherung, die die Mischung der N-Schalen durch den $\vec{l}'^2$ - und $\vec{l}'\vec{s}$ -Operator aufhebt, kann man

mit dem Modellcharakter dieser Operatoren begründen 18). Mit dem Übergang auf Zylinderkoordinaten (ϱ , z) und der Definition (B,6a)

$$f_\varrho = \tfrac{1}{2}(f_x + f_y) \quad ; \quad f_\alpha = \tfrac{1}{2}(f_x - f_y)$$

erhält man für (B,5)

(B,6b)

$$H_{Nilsson} = H_o + H'$$

$$H_o = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_o \left\{ f_\varrho \left[-\Delta_\varrho + \varrho^2 \right] + f_z \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z^2 \right] \right\}$$

$$H' = \tfrac{1}{2}\hbar\omega_o \left\{ f_\alpha \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + x^2 - y^2 \right] \right\} + C\vec{l}\vec{s} + D\left[\vec{l}^2 - \langle \vec{l}^2 \rangle_N \right]$$

Die Eigenfunktionen dieses anisotropen, harmonischen Oszillators H_o sind

(B,7)

$$\psi_{N, n_z; M, \Sigma} = \phi_{n, M}(\varrho, \varphi) \cdot Z_{n_z}(z) \cdot \chi_\Sigma$$

$$\phi_{n,M} = (-)^{\frac{M+|M|}{2}} \sqrt{\frac{2n!}{[(n+|M|)!]^3}}\, e^{-\varrho^2/2}\, \varrho^{|M|}\, L_n^{|M|}(\varrho^2)\, \frac{e^{iM\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$Z_{n_z} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^{n_z}\, n_z!}}\, e^{-z^2/2}\, H_{n_z}(z)$$

χ_Σ sind die Spin-Eigenfunktionen, L_n^M die Laguerreschen- und H_{nz} die Hermiteschen-Polynome. Zwischen den Quantenzahlen gelten die Relationen

(B,7a)

$$N = n_z + n_\varrho \quad ; \quad n_\varrho = 2n + |M|$$

Die Eigenwerte der Eigenfunktion von H_o sind

(B,8)

$$\mathcal{E} = \hbar\omega_o f_\varrho (n_\varrho + 1) + \hbar\omega_o f_z (n_z + 1/2)$$

Der Störterm H' von $H_{Nilsson}$ wird in diesen Eigenfunktionen diagonalisiert. Die dazu notwendigen Matrixelemente sind in 23) angegeben. Die Eigenwertgleichung von $H_{Nilsson}$ lautet in der Basis (B,7)

(B,9)

$$H_{Nilsson} |N, \Omega, \alpha\rangle = \mathcal{E}^{Nilsson}_{N\Omega\alpha} |N, \Omega, \alpha\rangle$$

$$|N, \Omega, \alpha\rangle = \sum_{n_z M} C^{N\Omega\alpha}_{n_z M} |N, n_z, M, \Sigma\rangle$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Nilsson-Ansatzes werden durch Modellparameter an die einzelnen Kerne angepaßt. Zum Einen sind dies die beiden Schalenparameter $\varkappa$ und μ . Diese wurden so gewählt 18), daß sie die experimentellen Einteilchenlevel von ug-Kernen im Bereich der Seltenen Erden (A ~ 165) und der Actiniden (A ~ 242) möglichst gut wiedergeben.

(B,9a)

	Protonen	Neutronen
μ	$0.493 + 0.649 \frac{A}{1000}$	$0.624 - 1.234 \frac{A}{1000}$
$\varkappa$	$0.0766 - 0.0779 \frac{A}{1000}$	$0.0641 - 0.0026 \frac{A}{1000}$

$$\mu = \frac{2D}{C} \quad ; \quad \varkappa = \frac{C}{2\hbar\omega_0}$$

Zum Anderen wird der Skalenfaktor $\hbar\omega_0$ dadurch bestimmt, daß der daraus berechnete Kernradius mit den experimentell gemessenen übereinstimmt.

(B,9b)

$$\hbar\omega_0 = 41.0\left[1 - \frac{1}{3}\frac{N-Z}{A}\right] \qquad \text{für Protonen}$$

$$\hbar\omega_0 = 41.0\left[1 + \frac{1}{3}\frac{N-Z}{A}\right] \qquad \text{für Neutronen}$$

Es werden für die Nukleonenarten verschiedene Werte benutzt, da schwere Kerne mehr Neutronen als Protonen enthalten. Um nun bei der hier verwendeten Störungsrechnung bezüglich dieser Parameterwahl konsistent zu bleiben, muß dies auch bei den Störtermen H_{QQ}^{II} (III,2c) und H_Q (III,4a) berücksichtigt werden. Verschiedene Stärken χ' der Q-Q-Kraft würden die numerische Auswertung der Erwartungswerte (VI,1) unnötig komplizieren, und deshalb werden die Q-Operatoren - genauer deren Dimension: die Oszillatorlänge $b = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ - so geändert, daß dies den Skalenfaktoren (B,9b) entspricht 15)

(B,9c)

$$a_N = \sqrt[3]{\frac{2N}{A}} \qquad \text{für Neutronen}$$

$$a_Z = \sqrt[3]{\frac{2Z}{A}} \qquad \text{für Protonen}$$

B,II Die Matrixelemente der Quadrupoloperatoren in den Eigenfunktionen des anisotropen, harmonischen Oszillators in Zylinderkoordinaten

Da bei der numerischen Rechnung nur die Matrixelemente längs der $\tilde{a}_3$-Achse (d.h. $\tilde{a}_2 = 0$) gebraucht werden, werden hier die von Null verschiedenen Matrixelemente von

(B,10)

$$Q_{20} = r^2 Y_{20}(\theta,\varphi) \quad ; \quad Q_{2\pm2} = r^2 Y_{2\pm2}(\theta,\varphi)$$

in dem körperfesten Koordinatensystem angegeben. Es wurden die Wellenfunktionen (B,7) mit den Transformationsfunktionen (B,2) benutzt.

(B,11)

$$\langle N, n_z, M | Q_{20} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\left[\frac{1}{f_z}(2n_z+1) - \frac{1}{f_\varrho}(N-n_z+1)\right]$$

$$\langle N-2, n_z-2, M | Q_{20} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{f_z}\sqrt{n_z(n_z-1)}$$

$$\langle N-2, n_z, M | Q_{20} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho+M)(n_\varrho-M)}$$

$$\langle N+2, n_z+2, M | Q_{20} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{f_z}\sqrt{(n_z+1)(n_z+2)}$$

$$\langle N+2, n_z, M | Q_{20} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho+M+2)(n_\varrho-M+2)}$$

$$\langle N, n_z, M+2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = -\frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho-M)(n_\varrho+M+2)}$$

$$\langle N, n_z, M-2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = -\frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho+M)(n_\varrho-M+2)}$$

$$\langle N-2, n_z, M+2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho-M)(n_\varrho-M-2)}$$

$$\langle N-2, n_z, M-2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho+M)(n_\varrho+M-2)}$$

$$\langle N+2, n_z, M+2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho+M+2)(n_\varrho+M+4)}$$

$$\langle N+2, n_z, M-2 | Q_{2\pm2} | M, n_z, N\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}\frac{1}{2f_\varrho}\sqrt{(n_\varrho-M+2)(n_\varrho-M+4)}$$

Von den hier angegebenen Matrixelementen der Q-Operatoren werden in der Störungsrechnung nicht alle verwendet, da sonst physikalisch unsinnige Effekte auftreten. Die Notwendigkeit, die Q-Q-Kraft in ihrer Auswirkung zu beschränken, ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Würde man die Q-Q-Kraft in einem vollständigen Satz von Eigenfunktionen ohne Einschränkung dennoch wirken lassen, dann würden sich die einzelnen Nukleonen so weit wie möglich von dem Zentrum des Kernes entfernt anordnen, und die Gleichgewichtsform eines Kernes wäre mit einer Nadel vergleichbar. Dieses unphysikalische Verhalten der Q-Kraft verhindert im Nilsson-Modell die Ausbildung eines Grundzustandsminimums in der PES, wenn die Volumenerhaltung vernachlässigt wird. Da dieses Verfahren (Volumenerhaltung) bei der hier verwendeten Störungsrechnung nicht möglich ist, werden nur die Quadrupol-Matrixelemente der Art $\langle N | Q_{2\mu} | N \rangle$ im Bereich der Fermikante verwendet.

Diese starke Einschränkung wird durch zwei Argumente gerechtfertigt. Einerseits muß man sich bei dem BCS-Formalismus auf den Bereich der Fermikante beschränken (siehe B,III), und deshalb sind die meisten Matrixelemente der Art $\langle N \pm 2 | Q_{2\mu} | N \rangle$ sowieso ausgeschlossen. Andererseits haben Baranger und Kumar 15) bei einem Vergleich der Matrixelemente einer Hamada-Johnston-Kraft mit denen der Q-Q-Kraft festgestellt, daß nur im Bereich der Fermi-Energie für die Matrixelemente innerhalb einer N-Schale $\langle N | Q_{2\mu} | N \rangle$ gute Übereinstimmung vorliegt, während außerhalb dieser Region die Quadrupol-Matrixelemente große Abweichungen zeigen.

Deshalb wurden bei der numerischen Rechnung von den Quadrupol-Matrixelementen (B,11) nur die innerhalb einer N-Schale $\langle N | Q_{2\mu} | N \rangle$ im Bereich der Fermikante verwendet. Das sind für den Kern $_{68}Er^{98}$ die Matrixelemente

(B,11a)

$\langle 4 | Q_{2\mu} | 4 \rangle$ und $\langle 5 | Q_{2\mu} | 5 \rangle$ für Protonen

$\langle 5 | Q_{2\mu} | 5 \rangle$ und $\langle 6 | Q_{2\mu} | 6 \rangle$ für Neutronen

B,III Diagonalisierung der Paarrestwechselwirkung

Im Folgenden wird davon ausgegangen, daß $H_{Nilsson}$ (B,1) diagonalisiert sei und $\varepsilon_\nu^{Nilsson}$ die Eigenwerte zu den entarteten Einteilchenzuständen $|\nu+\rangle$ und $|\nu-\rangle$ sind. Diese Zustände sind durch die Operation der Zeitumkehr miteinander verbunden. Man kann nun

(B,12)
$$H_{def} = H_{Nilsson} + H_{paar}$$

in dem Formalismus der zweiten Quantisierung schreiben.

(B,12a)
$$H_{def} = \sum_\nu (\varepsilon_\nu^{Nilsson} - \lambda)(c_{\nu+}^+ c_{\nu+} + c_{\nu-}^+ c_{\nu-}) - G \sum_{\nu\omega} c_{\nu+}^+ c_{\nu-}^+ c_{\omega-} c_{\omega+}$$

Die $c_{\nu\sigma}^+$ bzw. $c_{\nu\sigma}$ sind die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren des Einteilchenzustandes $|\nu\sigma\rangle$. Sie erfüllen die üblichen Regeln des Antikommutators. G ist die Stärke der Paarkraft und λ ein Lagrange-Multiplikator, der die Erhaltung der Teilchenzahl bewirkt.§ Es werden in (B,12) die üblichen BCS-Annahmen gemacht, von denen die wichtigsten kurz erwähnt seien: 1. Protonen und Neutronen werden unabhängig voneinander behandelt, da sich bei mittelschweren bis schweren Kernen (die hier betrachtet werden) die Protonen und Neutronen in verschiedenen j-Schalen aufhalten; 2. die Paarkraft soll eine kurze Reichweite haben, ihre Wirkung sei auf die Umgebung der Fermi-Kante beschränkt.

Eine detaillierte Begründung und Ableitung findet man in der Arbeit von Belyaev 16). Es werden im Folgenden dessen Ergebnisse für g-g-Kerne skizziert.

Man geht davon aus, daß die Paarkraft nur zwischen zueinander konjugierten Zuständen $|\nu+\rangle$ und $|\nu-\rangle$ wirkt. Man führt neue Teilchenoperatoren (Quasiteilchen) mit der Bogolyubov-Transformation ein.

(B,13)
$$\alpha_\nu^+ = u_\nu c_{\nu+}^+ - v_\nu c_{\nu-} \quad ; \quad \beta_\nu^+ = u_\nu c_{\nu-}^+ + v_\nu c_{\nu+}$$

Anmerkung: § Die Teilchenzahl wird durch die BCS-Wellenfunktion verletzt.

Diese Erzeugungsoperatoren von Quasiteilchen erfüllen die gleichen Regeln des Antikommutators wie die $c_{\nu\sigma}$ -Operatoren, verletzen aber die Teilchenerhaltung. Durch die inverse Transformation kann (B,12) in Termen von α^+ , β^+ und α , β formuliert werden.

(B,14)

$$H = U + H_{11} + H_{2o} + H_{int}$$

Der Term U ist eine Konstante, H_{11} enthält Terme, die proportional ($\alpha^+_\nu \alpha_\nu + \beta^+_\nu \beta_\nu$) sind und H_{2o} ist proportional ($\alpha^+_\nu \beta^+_\nu + \beta_\nu \alpha_\nu$). H_{int} hat wenig Einfluß und wird vernachlässigt. Damit (B,14) mit dem Operator der Quasiteilchenanzahl kommutiert, muß $H_{2o} = o$ sein. Daraus erhält man die Beziehung

(B,15)

$$\frac{2}{G} = \sum_\nu E_\nu^{-1}$$

wobei

(B,16)

$$\bar{E}_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu^{Milnoon} - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad ; \quad \Delta = G \sum_\nu u_\nu v_\nu$$

$$u_\nu^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\varepsilon_\nu^{Milnoon} - \lambda}{\bar{E}_\nu}\right] \quad ; \quad v_\nu^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varepsilon_\nu^{Milnoon} - \lambda}{\bar{E}_\nu}\right]$$

Für die Grundzustandswellenfunktion $|o_{BCS}\rangle$ machten Bardeen, Cooper und Schriefer 24) den Ansatz

(B,17)

$$|o_{BCS}\rangle = \prod_\nu \left[u_\nu + v_\nu c^+_{\nu+} c^+_{\nu-}\right] |Vakuum\rangle$$

Die BCS-Wellenfunktionen werden durch die Quasiteilchenoperatoren bezüglich $|o_{BCS}\rangle$ beschrieben. Die angeregten Zustände enthalten bei g-g-Kernen eine gerade Anzahl von Quasiteilchenoperatoren.

(B,18)

$$|\nu\omega\rangle = \alpha^+_\nu \beta^+_\omega |o_{BCS}\rangle$$

Da im Folgenden ausschließlich g-g-Kerne betrachtet werden, wird für die Indizes der Wellenfunktionen und Eigenwerte eine verkürzte Schreibweise eingeführt.

(B,19)

$$|j\rangle \equiv |j', j''\rangle = \alpha^+_{j'} \beta^+_{j''} |o_{BCS}\rangle$$

$$E_j \equiv \bar{E}_{j'} + \bar{E}_{j''}$$

Bei der Diagonalisierung der Paarkraft werden vier Modellgrößen eingeführt: der Energiegap Δ der g-g-Kerne, der Lagrangemultiplikator λ zur Erhaltung der Teilchenzahl, die Stärke G der Paarkraft und in Verbindung damit die Anzahl N_{Paar} der Level, auf die die konstante Paarkraft wirkt. Da der BCS-Formalismus nur zwei Bestimmungsgleichungen - (B,15) und die Teilchenerhaltung - liefert, wird das Verhältnis von G und N_{Paar} so gewählt, daß λ der Fermienergie und Δ der u-g-Massendifferenz des betrachteten Kernes entsprechen. Bei der Fixierung dieser beiden Parameter ist es sinnvoll, den Wirkungsbereich der Paarkraft auf die Kernoberfläche zu beschränken, da sonst die Annahme einer konstanten Stärke physikalisch nicht zu rechtfertigen ist.

Hier wurde für die Neutronen und Protonen $N_{Paar} = 25$ gewählt (12 Level über und 12 unterhalb der Fermienergie). Dann ergibt sich in Hinblick auf den Protonen- und Neutronengap von Erbium 166

$$G_P \cdot A = 30.0 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad G_N \cdot A = 27.6 \text{ MeV}$$

B,IV Transformation der Matrixelemente im BCS-Formalismus in Matrixelemente von Einteilchenfunktionen

Gegeben sei ein Einteilchenoperator $\hat{R} = \sum_{\nu\omega} r_{\nu\omega}\, c_\nu^+ c_\omega$.

In der Darstellung der Quasiteilchen gilt
(B,2o)

$$\hat{R} = \sum_{\nu} r_{\nu\nu}\, 2 V_\nu^2 + \sum_{\nu\omega} r_{\nu\omega} \left[u_\nu u_\omega - v_\nu v_\omega \right] \left[\alpha_\nu^+ \alpha_\omega + \beta_\nu^+ \beta_\omega \right] + \sum_{\nu\omega} r_{\nu\omega} \left[u_\nu v_\omega + u_\omega v_\nu \right] \left[\alpha_\nu^+ \beta_\omega^+ + \beta_\nu \alpha_\omega \right]$$

Für BCS-Matrixelemente gilt dann
(B,21)

$$\sum_{J\neq 0} \langle J | \hat{R} | 0 \rangle = \sum_{J'J''} r_{J'J''} \left[u_{J'} v_{J''} + u_{J''} v_{J'} \right]$$

$$\sum_{J\neq 0} \sum_{\lambda\neq 0} \langle J | \hat{R} | \lambda \rangle = \sum_{\nu} r_{\nu\nu}\, 2 V_\nu^2\, \delta_{J'\lambda'}\, \delta_{J''\lambda''} + \sum_{J'\lambda'} r_{J'\lambda'} \left[u_{J'} u_{\lambda'} - v_{J'} v_{\lambda'} \right] + \sum_{J''\lambda''} r_{J''\lambda''} \left[u_{J''} u_{\lambda''} - v_{J''} v_{\lambda''} \right]$$

Dabei wurde die verkürzte Schreibweise (B,19) benutzt und $r_{J'J''} \equiv \langle J' | \hat{R} | J'' \rangle$ wobei hier die Einteilchenwellenfunktionen von H_{Nilsson} zu benutzen sind.

C Die Grundzustandswellenfunktion in 3. Ordnung Störungsrechnung als Funktion der Deformationsparameter des Potentials

Entwickelt man die Grundzustandswellenfunktion (IV,3)

$$\Psi_0 = \sum_j c_j(t)\, \varphi_j\, e^{\frac{E_j}{i\hbar}t}$$

nach den BCS-Wellenfunktionen φ_j, dann erhält man mit der adiabatischen Näherung für die Entwicklungskoeffizienten

(C,1)

$$C_0^{[3]}(t) = 1$$

$$+\frac{\chi}{i\hbar}\sum_{\mu\nu}\sum_{j\neq 0} Q_{0j}^{\nu}\left[A_j^{\mu}\int_{t_0}^{t}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\,dt' - \frac{\hbar}{i}B_j^{\mu}\int_{t_0}^{t}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\,dt'\right]$$

$$+\frac{\chi^2}{i\hbar}\sum_{\mu\nu}\sum_{j\neq 0}\sum_{\substack{l\neq 0\\ l\neq j}} Q_{0l}^{\nu}\left[C_{lj}^{\nu\mu}\int_{t_0}^{t}\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu\varepsilon_\varphi\,dt' - \frac{\hbar}{i}D_{lj}^{\nu\mu}\int_{t_0}^{t}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi\,dt'\right.$$

$$\left. -\frac{\hbar}{i}F_{lj}^{\nu\mu}\int_{t_0}^{t}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi\,dt' - \hbar^2 F_{lj}^{\nu\mu}\int_{t_0}^{t}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi\,dt'\right]$$

(C,2)

$$C_{m\neq 0}^{[3]}(t) = \left\{\chi\sum_\mu\left[A_m^{\mu}\varepsilon_\mu - \frac{\hbar}{i}B_m^{\mu}\dot\varepsilon_\mu\right]\right.$$

$$+\chi^2\sum_{\mu\nu}\sum_{j\neq 0}\left[C_{jm}^{\nu\mu}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu - \frac{\hbar}{i}D_{jm}^{\nu\mu}\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu - \frac{\hbar}{i}F_{jm}^{\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu - \hbar^2 F_{jm}^{\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\right]$$

$$+\chi^3\sum_{\mu\nu\varphi}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{l\neq 0\\ l\neq j}}\left[G_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi + \frac{\hbar}{i}R_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\dot\varepsilon_\varphi\right.$$

$$-\frac{\hbar}{i}H_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi - \frac{\hbar}{i}K_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi - \frac{\hbar}{i}L_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\dot\varepsilon_\varphi$$

$$\left.\left. -\hbar^2 M_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\varepsilon_\varphi - \hbar^2 N_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\dot\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\dot\varepsilon_\varphi - \hbar^2 P_{ljm}^{\varphi\nu\mu}\varepsilon_\mu\dot\varepsilon_\nu\dot\varepsilon_\varphi\right]\right\} e^{\frac{i}{\hbar}(m-0)t}$$

Es werden für die Matrixelemente und die Energienenner die Abkürzungen (IV,15)

$$Q_{m0}^{\mu} \equiv \langle m|\hat Q_\mu|0\rangle \qquad ; \qquad (m-0) \equiv E_m - E_0$$

benutzt.

Die weiteren Abkürzungen bedeuten:

(C,3)

$$A^{\mu}_{m} = \frac{Q^{\mu}_{om}}{(m-o)} \quad ; \quad B^{\mu}_{m} = \frac{Q^{\mu}_{om}}{(m-o)^2}$$

$$C^{\nu\mu}_{jm} = \frac{Q^{\mu}_{mj}\, Q^{\nu}_{jo}}{(m-o)(j-o)} \quad ; \quad D^{\nu\mu}_{jm} = \frac{Q^{\mu}_{mj}\, Q^{\nu}_{jo}}{(m-o)(j-o)} \left[\frac{1}{m-o} + \frac{1}{j-o}\right]$$

$$E^{\nu\mu}_{jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right] \quad ; \quad F^{\nu\mu}_{jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right]\left[\frac{2}{m-o} + \frac{1}{j-o}\right]$$

$$G^{\nu\mu}_{\lambda jm} = \frac{Q^{\mu}_{mj}\, Q^{\nu}_{j\lambda}\, Q^{\varkappa}_{\lambda o}}{(m-o)(j-o)(\lambda-o)} \quad ; \quad H^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \frac{Q^{\mu}_{mj}\, Q^{\nu}_{j\lambda}\, Q^{\varkappa}_{\lambda o}}{(m-o)(j-o)(\lambda-o)} \left[\frac{1}{m-o}\right]$$

$$K^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o} + \frac{1}{j-o}\right] \quad ; \quad L^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o} + \frac{1}{j-o} + \frac{1}{\lambda-o}\right]$$

$$M^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right]\left[\frac{2}{m-o} + \frac{1}{j-o}\right]$$

$$N^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right]\left[\frac{2}{m-o} + \frac{1}{j-o} + \frac{1}{\lambda-o}\right]$$

$$P^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right]\left[\frac{2}{m-o} + \frac{2}{j-o} + \frac{1}{\lambda-o}\right]$$

$$R^{\varkappa\nu\mu}_{\lambda jm} = \text{''} \left[\frac{1}{m-o}\right]\left[\frac{6}{(m-o)^2} + \frac{4}{(m-o)(j-o)} + \frac{2}{(m-o)(\lambda-o)} + \frac{1}{(j-o)(\lambda-o)}\right]$$

In (C,1) wurden die Integrale nicht ausgewertet, da hier die Lösungsmethode der adiabatischen Näherung (Kapitel IV) unbrauchbar ist. Dieser Umstand macht sich im Weiteren nicht bemerkbar, da bei der Bildung des Grundzustandserwartungswertes (Kapitel VI) dieser Koeffizient nicht benötigt wird.

D,I Transformation der Potentialparameter in die Quadrupolparameter

Löst man das Gleichungssystem (V,1) nach dem in Kapitel V angegebenen iterativen Verfahren nach $\mathcal{E}_\mu(t)$ auf, dann erhält man in dritter Ordnung

(D,1)

$$\mathcal{E}_\mu(t) = \frac{1}{\chi}\frac{1}{A_\mu}q_\mu$$

$$-\frac{1}{\chi}\sum_{\nu\gamma}\frac{1}{A_\mu A_\nu A_\gamma}\left[B^{\mu}_{\nu\gamma}\,q_\nu q_\gamma - t^2 C^{\mu}_{\nu\gamma}\,\dot q_\nu \dot q_\gamma\right]$$

$$-\frac{1}{\chi}\sum_{\nu\gamma\xi}\frac{1}{A_\mu A_\nu A_\gamma A_\xi}\left[D^{\mu}_{\nu\gamma\xi}\,q_\nu q_\gamma q_\xi - t^2 E^{\mu}_{\nu\gamma\xi}\,\dot q_\nu \dot q_\gamma q_\xi - t^2 F^{\mu}_{\nu\gamma\xi}\,\dot q_\nu q_\gamma \dot q_\xi - t^2 G^{\mu}_{\nu\gamma\xi}\,q_\nu \dot q_\gamma \dot q_\xi\right]$$

$$+\frac{1}{\chi}\sum_{\nu\gamma\xi\delta}\frac{1}{A_\mu A_\nu A_\gamma A_\xi A_\delta}\left[B^{\delta}_{\gamma\xi}\left(B^{\mu}_{\nu\delta}+B^{\mu}_{\delta\nu}\right)q_\nu q_\gamma q_\xi - t^2 B^{\delta}_{\gamma\xi}\left(C^{\mu}_{\nu\delta}+C^{\mu}_{\delta\nu}\right)\dot q_\nu \dot q_\gamma q_\xi - t^2 B^{\delta}_{\gamma\xi}\left(C^{\mu}_{\nu\delta}+C^{\mu}_{\delta\nu}\right)\dot q_\nu q_\gamma \dot q_\xi - t^2 C^{\delta}_{\gamma\xi}\left(B^{\mu}_{\nu\delta}+B^{\mu}_{\delta\nu}\right)q_\nu \dot q_\gamma \dot q_\xi\right]$$

Es wurden die Konventionen (IV,15) und die folgenden Abkürzungen benutzt.

(D,2)

$$A_\mu = 2\sum_{m\neq 0}\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\mu}_{m0}}{(m-0)}$$

$$B^{\mu}_{\nu\gamma} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}2 + \frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)} + \frac{Q^{\nu}_{0j}Q^{\mu}_{jj}Q^{\gamma}_{j0}}{(j-0)^2}\right]$$

$$C^{\mu}_{\nu\gamma} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)^2(j-0)}2\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right] - \frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)^2(j-0)} - \frac{Q^{\nu}_{0j}Q^{\mu}_{jj}Q^{\gamma}_{j0}}{(j-0)^4}\right]$$

$$D^{\mu}_{\nu\gamma\xi} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)}2 + 2\frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)} + 2\frac{Q^{\nu}_{0j}Q^{\mu}_{jj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(j-0)^3}\right]$$

$$E^{\mu}_{\nu\gamma\xi} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(m-0)^2(j-0)(\lambda-0)}\left[\frac{4}{m-0}+\frac{2}{j-0}\right] - 2\frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(m-0)^2(j-0)(\lambda-0)}\left[\frac{1}{j-0}\right] - 2\frac{Q^{\nu}_{0j}Q^{\mu}_{jj}Q^{\gamma}_{j\lambda}Q^{\xi}_{\lambda 0}}{(j-0)^4(\lambda-0)}\right]$$

$$F^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\rho}_{j\lambda}Q^{\sigma}_{\lambda 0}}{(m-0)^2(j-0)(\lambda-0)}\left[\frac{4}{m-0}+\frac{2}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]-\frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\rho}_{j\lambda}Q^{\sigma}_{\lambda 0}}{(m-0)^2(j-0)(\lambda-0)}\left[\frac{2}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{Q_{0j}Q_{jj}Q_{j\lambda}Q_{\lambda 0}}{(j-0)^3(\lambda-0)}\left[\frac{2}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]\right]$$

$$G^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}}\left[\frac{Q^{\mu}_{0m}Q^{\nu}_{mj}Q^{\rho}_{j\lambda}Q^{\sigma}_{\lambda 0}}{(m-0)^2(j-0)(\lambda-0)}\left[\frac{4}{m-0}+\frac{4}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]+\frac{Q^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\rho}_{j\lambda}Q^{\sigma}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)^2(\lambda-0)}\left[\frac{4}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{Q^{\nu}_{0j}Q^{\mu}_{jj}Q^{\rho}_{j\lambda}Q^{\sigma}_{\lambda 0}}{(j-0)^3(\lambda-0)}\left[\frac{4}{j-0}+\frac{2}{\lambda-0}\right]\right]$$

D,II Transformation der Quadrupolparameter in die Oberflächenparameter der Radiusentwicklung

Die Quadrupolmomente eines Ellipsoides lauten (V,5)

(D,3)

$$Q_{20}^{kl} = \mathcal{C}\left[6\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2\right]\left[(1-\alpha-\beta)(1-\alpha+\beta)(1+2\alpha)\right]^{-2/3}$$

$$Q_{2\pm2}^{kl} = \mathcal{D}\left[\beta(2-\alpha)\quad\right]\left[(1-\alpha-\beta)(1-\alpha+\beta)(1+2\alpha)\right]^{-2/3}$$

Der Nenner mit der Potenz 2/3 hat seinen Ursprung in der Volumenerhaltung.

(D,3a)

$$\mathcal{C} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,A R_k^2 \qquad \mathcal{D} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,A R_k^2$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,a_0 \qquad \beta = 2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,a_2$$

R_k ist der Radius, den ein sphärischer Kern der Masse A besitzt. Die Transformationsgleichungen zwischen den Parametern $\tilde{q}_\mu$ und $\tilde{a}_\mu$ erhält man, indem der Grundzustandserwartungswert der Q-Operatoren (III,9) mit den klassischen Quadrupolmomenten (D,3) verglichen wird.

(D,4)

$$Q_{2\mu}^{kl} = \langle \Psi_0 | Q_{2\mu} | \Psi_0 \rangle$$

$$= \bar{q}_\mu + q_\mu(t)$$

Unterteilt man die Oberflächenparameter $\tilde{a}_\mu$ der Radiusentwicklung in einen konstanten und einen zeitabhängigen Anteil

(D,5)

$$\tilde{a}_\mu = \bar{a}_\mu + a_\mu(t)$$

dann erhält man durch eine konsistente Entwicklung in dritter Ordnung

(D,6)

$$q_0(t) = \frac{\mathcal{C}}{g^{5/3}}\Big\{6(1+\alpha+\alpha^2-3\alpha^3)\vartheta + 3\,\frac{1+14\alpha+15\alpha^2+12\alpha^3}{(1+2\alpha)}\,\vartheta^2$$

$$+4\,\frac{3+7\alpha+44\alpha^2+33\alpha^3+18\alpha^4}{(1-\alpha)(1+2\alpha)^2}\,\vartheta^3$$

$$-(1-4\alpha-13\alpha^2-2\alpha^3)\zeta^2 + 4\,\frac{1+3\alpha+10\alpha^2+\alpha^3}{(1-\alpha)}\,\vartheta\zeta^2\Big\}$$

$$q_2(t) = \frac{\mathcal{D}}{g^{5/3}}\Big\{(2-\alpha-6\alpha^2+7\alpha^3-2\alpha^4)\zeta - (1-8\alpha+5\alpha^2+2\alpha^3)\vartheta\zeta$$

$$+2\,\frac{1-3\alpha+4\alpha^2-2\alpha^3}{(1+2\alpha)}\,\vartheta^2\zeta + \frac{2}{3}(2+3\alpha-2\alpha^2)\zeta^3\Big\}$$

Dabei gilt:

(D,6a)

$$g = (1-\alpha)^2(1+2\alpha) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \bar{a}_0$$

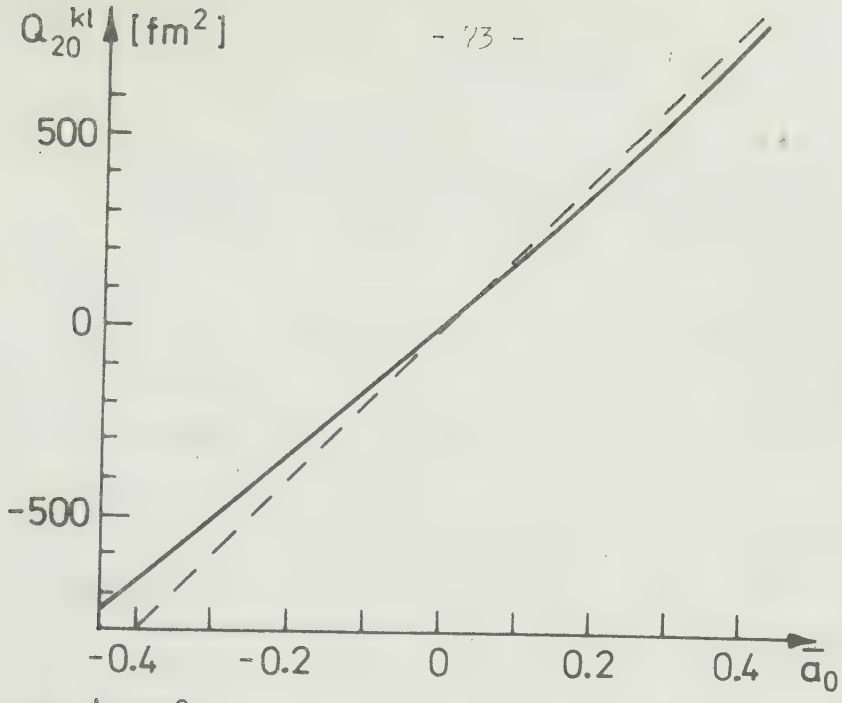
$$\mathcal{D} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ a_0(t) \qquad \mathcal{L} = 2\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\ a_2(t)$$

Bei dieser Entwicklung wurde $\bar{a}_2 = 0.0$ gesetzt, d.h. die Gleichungen gelten längs der $\bar{a}_0$-Achse. Diese Einschränkung ist möglich, da man sich bei der numerischen Berechnung der kollektiven Massen- und Potentialparameter auf die Änderung von $a_0(t)$ beschränken kann.

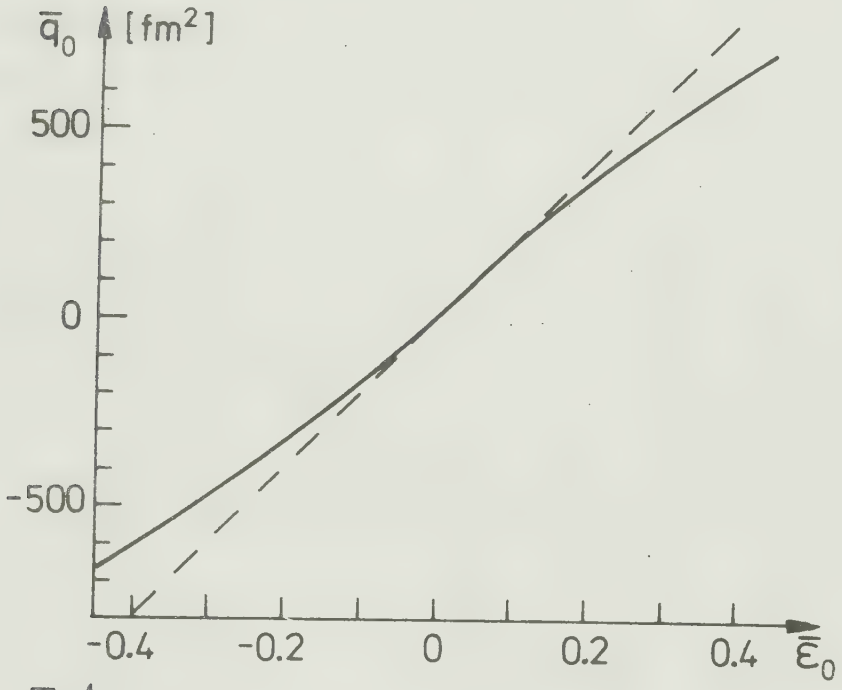
D,III Transformation der statischen Deformationsparameter des Potentials in die der Oberfläche

Bei dem Koeffizientenvergleich der Massen- und Potentialfunktionen (VII,7) mit den entsprechenden Funktionen (VII,2) und (VII,3) der kollektiven H-Funktion (II,4) muß beachtet werden, daß man bei der numerischen Berechnung die Q-Matrixelemente wegen der BCS-Wellenfunktion (IV,2) als Funktion der statischen Deformationsparameter $\bar{\varepsilon}_\mu$ erhält. Die Transformation dieser impliziten Abhängigkeit der Matrixelemente wird numerisch durchgeführt.

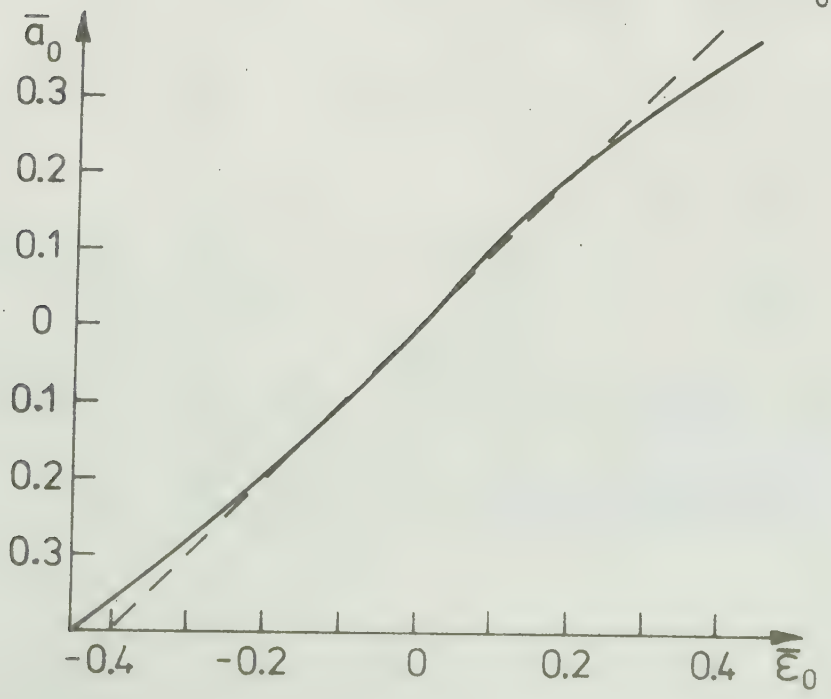
Dazu werden in Übereinstimmung mit den Annahmen des Abschnittes V die mikroskopisch berechneten Q-Momente $\bar{q}_\mu = \bar{q}_\mu(\bar{\varepsilon}_\mu)$ (V,3) mit den klassischen $Q^{M}_{\lambda\mu} = Q^{M}_{\lambda\mu}(\bar{a}_\mu)$ (V,6) verglichen. Für den Kern $_{68}Er^{98}$ ist in Figur 2a und 2b das auf diese Arten berechnete Q_{20}-Moment gezeichnet, und der numerische Vergleich ergibt die in Figur 2c angegebene Transformation $\bar{\varepsilon}_\mu = \bar{\varepsilon}_\mu(\bar{a}_\mu)$ bzw. $\bar{a}_\mu = \bar{a}_\mu(\bar{\varepsilon}_\mu)$


Q_{20}^{kl} [fm^2]
500
0
-500
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{a}_0$

a)


$\bar{q}_0$ [fm^2]
500
0
-500
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

b)


$\bar{a}_0$
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

c)

Fig.2

E,I Die Massen- und Potentialfunktionen der Grundzustands-erwartungswerte

In den Massen- und Potentialfunktionen $C^{\xi}_{ij}(\mu\cdots)$ und $B^{\xi}_{ij\lambda}(\mu\cdots)$ der Erwartungswerte (VI,4),(VI,5),(VI,6) und (VI,7) sind, wie ein Vergleich mit der umgeformten H-Funktion zeigt (Anhang F), die kernspezifischen Parameter C_i, B_{ij} des Ansatzes (I,3) enthalten. Es werden im Folgenden für die Ansätze (III,2) und (III,4) die expliziten Ausdrücke der Funktionen konsistent in vierter Ordnung angegeben. Dabei werden als Darstellung der kollektiven Variablen die Potentialparamater $\tilde{\varepsilon}_{\mu}(t)$ und die Quadrupolparameter $\tilde{q}_{\mu}(t)$ benutzt. Die Transformation (D,6) der Massen- und Potentialfunktionen in der $\{\tilde{q}_{\mu}\}$-Darstellung in Funktionen der Oberflächenparameter $\tilde{\beta}_{\mu}(t)$ wird in E,II gesondert angegeben.

Die Massen- und Potentialfunktionen des Erwartungswertes von H^{II} (III,2) haben in der $\{\tilde{\varepsilon}_{\mu}\}$-Darstellung im Gegensatz zu den entsprechenden Funktionen von H^{III} (III,4) eine komplizierte Form, da der zeitabhängige Anteil H^{II}_{QQ} (III,2c) bei fast allen Termen α'-abhängige Anteile liefert.

(E,1)

$$C^{2}_{21}(\mu) = \sum_{m\neq 0} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\mu}_{m0}}{(m-0)} \equiv \sum_{1}^{\mu}$$

$$C^{2}_{31}(\mu\nu\gamma) = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}\, 2$$

$$C^{2}_{41}(\mu\nu\gamma\delta) = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{j\lambda} Q^{\delta}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)}\, 3$$

$$C^{2}_{22}(\mu) = \left[\sum_{m\neq 0} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\mu}_{m0}}{(m-0)}\right]^2$$

$$C^{2}_{32}(\mu\nu\gamma) = \left[\sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}\, 2 + \sum_{\substack{m\neq 0\\ j\neq 0}} \frac{Q^{\nu}_{0m} Q^{\mu}_{mj} Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}\right] \sum_{1}^{\mu}$$

$$C^{2}_{42}(\mu\nu\gamma\delta) = \left[\sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{j\lambda} Q^{\delta}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)}\, 4 + \sum_{\substack{m\neq 0\\ j\neq 0}}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq j}} \frac{Q^{\nu}_{0m} Q^{\mu}_{mj} Q^{\gamma}_{j\lambda} Q^{\delta}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)}\, 2\right] \sum_{1}^{\mu}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\xi} \frac{1}{\sum_{1}^{\xi}\sum_{1}^{\xi}} \left[C^{\lambda}_{32}(\xi\mu\nu) + C^{2}_{32}(\xi\gamma\delta)\right]$$

$$\mathcal{B}_2^2(\mu) = \sum_{m\neq 0} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{m}_{m0}}{(m-0)} \left[\frac{1}{(m-0}\right]^2$$

$$\mathcal{B}_{311}^2(\mu\nu\gamma) = \sum_{m\neq 0} \sum_{\substack{j\neq 0 \\ j\neq m}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)} \left[\frac{-2}{(m-0)}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right]$$

$$\mathcal{B}_{32}^2(\mu\nu\gamma) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left[\frac{2}{(m-0)}\right]\left[\frac{1}{m-0}\right]$$

$$\mathcal{B}_{33}^2(\mu\nu\gamma) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left[\frac{2}{(m-0)}\right]\left[\frac{1}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right]$$

$$\mathcal{B}_{411}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \sum_{m\neq 0} \sum_{\substack{j\neq 0 \\ j\neq m}} \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k\neq j}} \frac{Q^{\mu}_{0m} Q^{\nu}_{mj} Q^{\gamma}_{jk} Q^{\delta}_{k0}}{(m-0)(j-0)(k-0)} \left(\left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{2}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] - \left[\frac{1}{j-0}\right]\left[\frac{2}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{421}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right] + \left[\frac{1}{j-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{431}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] + \left[\frac{1}{j-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{441}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right] + \left[\frac{1}{j-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}+\frac{1}{m-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{445}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}+\frac{1}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] + \left[\frac{1}{j-0}+\frac{1}{m-0}\right]\left[\frac{1}{k-0}+\frac{1}{j-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{446}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}\right] - \left[\frac{1}{j-0}\right]\left[\frac{2}{j-0}+\frac{1}{m-0}\right] \right)$$

$$\mathcal{B}_{447}^2(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \left(\left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{6}{(m-0)^2}+\frac{4}{(m-0)(j-0)}+\frac{2}{(m-0)(k-0)}+\frac{1}{(j-0)(k-0)}\right] \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{(j-0)^2}\right]\left[\frac{4}{(j-0)^2}+\frac{2}{(j-0)(m-0)}+\frac{2}{(j-0)(k-0)}+\frac{1}{(k-0)(m-0)}\right] \right)$$

$$B^2_{312}(\mu\nu\gamma) = \sum_1^{\mu}\Bigg(\sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}} \frac{Q^{\mu}_{0m}\tilde{Q}^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right] - \sum_{\substack{m\neq 0\\ j\neq 0}}\frac{\tilde{Q}^{\nu}_{0m}Q^{\mu}_{mj}Q^{\gamma}_{j0}}{(m-0)(j-0)}\left[\frac{1}{m-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}\right]\Bigg)$$

$$B^2_{412}(\mu\nu\gamma\delta) = \frac{1}{2}\sum_{\xi}\left[\sum_1^{\xi}\right]^2\left[C^2_{32}(\xi\mu\nu)\;B^2_{312}(\xi\gamma\delta)\right]$$

$$+\sum_1^{\mu}\Bigg(\sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{j\neq 0\\ j\neq m}}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq j}}\frac{Q^{\mu}_{0m}\tilde{Q}^{\nu}_{mj}Q^{\gamma}_{jk}Q^{\delta}_{k0}}{(m-0)(j-0)(k-0)}\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{2}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] + \sum_{\substack{m\neq 0\\ j\neq 0}}\sum_{\substack{k\neq 0\\ k\neq j}}\frac{Q_{0m}Q_{mj}Q_{jk}Q_{k0}}{(m-0)(j-0)(k-0)}\left[\frac{2}{j-0}\right]\left[\frac{2}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right]\Bigg)$$

$$B^2_{422}(\mu\nu\gamma\delta) = \sum_1^{\mu}\Bigg(\quad''\qquad''\qquad\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}\right] - \quad''\qquad''\qquad\left[\frac{2}{j-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}\right]\Bigg)$$

$$B^2_{432}(\mu\nu\gamma\delta) = \sum_1^{\mu}\Bigg(\quad''\qquad''\qquad\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right] - \quad''\qquad''\qquad\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}+\frac{1}{k-0}\right]\Bigg)$$

$$B^2_{472}(\mu\nu\gamma\delta) = -\frac{1}{2}\sum_{\xi}\left[\sum_1^{\xi}\right]^2\left[B^2_{312}(\xi\mu\nu)\;B^2_{312}(\xi\gamma\delta)\right]$$

(E,2)

$$C_2^3(\mu) = -C_{21}^2(\mu)$$

$$C_3^3(\mu\nu\gamma) = -\tfrac{1}{2}C_{31}^2(\mu\nu\gamma)$$

$$C_4^3(\mu\nu\gamma\delta) = -\tfrac{1}{3}C_{41}^2(\mu\nu\gamma\delta) \; -2\sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq m}} \frac{Q_{0m}^{\mu} Q_{mm}^{\nu} Q_{m\lambda}^{\gamma} Q_{\lambda 0}^{\delta}}{(m-0)(m-0)(\lambda-0)}$$

$$B_2^3(\mu) = B_2^2(\mu)$$

$$B_{31}^3(\mu\nu\gamma) = \sum_{m\neq 0}\sum_{j\neq 0} \frac{Q_{0m}^{\mu} Q_{mj}^{\nu} Q_{j0}^{\gamma}}{(m-0)(j-0)} \qquad \left[\frac{-1}{m-0}\right]\left[\frac{1}{j-0}\right]$$

$$B_{32}^3(\mu\nu\gamma) = B_{32}^2(\mu\nu\gamma)$$

$$B_{33}^3(\mu\nu\gamma) = B_{33}^2(\mu\nu\gamma)$$

$$B_{41}^3(\mu\nu\gamma\delta) = \sum_{m\neq 0}\sum_{\substack{\lambda\neq 0\\ \lambda\neq m}} \frac{Q_{0m}^{\mu} Q_{mm}^{\nu} Q_{m\lambda}^{\gamma} Q_{\lambda 0}^{\delta}}{(m-0)(m-0)(\lambda-0)}\left[\frac{2}{m-0}\right]\left[\frac{2}{m-0}+\frac{1}{\lambda-0}\right]$$

$$B_{42}^3(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}\right]$$

$$B_{43}^3(\mu\nu\gamma\delta) = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-2}{m-0}\right]\left[\frac{1}{m-0}+\frac{1}{\lambda-0}\right]$$

$$B_{44}^3(\mu\nu\gamma\delta) = B_{44}^2(\mu\nu\gamma\delta)$$

$$B_{45}^3(\mu\nu\gamma\delta) = B_{45}^2(\mu\nu\gamma\delta)$$

$$B_{46}^3(\mu\nu\gamma\delta) = B_{46}^2(\mu\nu\gamma\delta)$$

$$B_{47}^3(\mu\nu\gamma\delta) = B_{47}^2(\mu\nu\gamma\delta)$$

$$C^{II}_{41} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3 H_4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \neq j}}^{\infty} \frac{Q^{\lambda}_{0m} Q^{m}_{j} Q^{j}_{\lambda} Q^{0}_{\lambda 0}}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)} \quad [3]$$

$$B^{II}_{411} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-4}{(m-0)^2} - \frac{4}{(m-0)(j-0)} - \frac{2}{(m-0)(\lambda-0)} - \frac{2}{(j-0)^2} - \frac{1}{(j-0)(\lambda-0)}\right]$$

$$B^{II}_{421} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-4}{(m-0)^2} - \frac{2}{(m-0)(j-0)} + \frac{1}{(j-0)^2}\right]$$

$$B^{II}_{431} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-4}{(m-0)^2} - \frac{2}{(m-0)(j-0)} - \frac{2}{(m-0)(\lambda-0)} + \frac{1}{(j-0)^2} + \frac{1}{(j-0)(\lambda-0)}\right]$$

$$B^{II}_{441} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{+2}{(m-0)^2} + \frac{2}{(m-0)(j-0)} + \frac{1}{(j-0)^2} + \frac{1}{(j-0)(m-0)}\right]$$

$$B^{II}_{461} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{+2}{(m-0)^2} + \frac{2}{(m-0)(j-0)} + \frac{2}{(m-0)(\lambda-0)} + \frac{1}{(j-0)^2} + \frac{1}{(j-0)(m-0)} + \frac{1}{(j-0)(\lambda-0)} + \frac{1}{(\lambda-0)(m-0)}\right]$$

$$B^{II}_{461} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{+2}{(m-0)^2} - \frac{2}{(j-0)^2} - \frac{1}{(j-0)(m-0)}\right]$$

$$B^{II}_{871} = \text{"} \qquad \text{"} \qquad \left[\frac{-12}{(m-0)^3} - \frac{8}{(m-0)^2(j-0)} - \frac{4}{(m-0)^2(\lambda-0)} - \frac{3}{(m-0)(j-0)(\lambda-0)} + \frac{4}{(j-0)^3} + \frac{2}{(j-0)^2(\lambda-0)} + \frac{2}{(j-0)^2(m-0)}\right]$$

$$C^{I}_{\alpha\lambda} = \sum_{\varepsilon} \frac{\lambda}{A_\beta A_\delta A_\gamma A_\delta A_\varepsilon} \sum_{m=0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq m}} \left[\frac{Q^{\alpha}_{0m} Q^{\delta}_{mj} Q^{\varepsilon}_{j0}}{(m-0)(j-0)} (-1) + \frac{Q^{\alpha}_{0m} Q^{\varepsilon}_{mj} Q^{\delta}_{j0}}{(m-0)(j-0)} (-1) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{I}_{4\alpha\lambda} = \text{"} \left[\text{"} (+1) + \text{"} (+1) \right] C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{I}_{4\alpha 2} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{2}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) + \text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{2}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{II}_{4\alpha 2} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{2}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) + \text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{2}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{II}_{44\lambda} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) + \text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{m-0}\right) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{I}_{46\lambda} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) + \text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{m-0}\right) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{II}_{462} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{m-0}\right) + \text{"} \left(\frac{-1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{(m-0)} + \frac{1}{(j-0)}\right) \right] B^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$B^{II}_{472} = \text{"} \left[\text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{m-0}\right) + \text{"} \left(\frac{1}{m-0}\right)\left(\frac{1}{m-0} + \frac{1}{(j-0)}\right) \right] C^{\varepsilon}_{\delta\gamma}$$

$$C^{II}_{43} = \frac{1}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_1^{\mu\mu}\left[B^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \sum_1^{\mu\mu} D^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right)\right]$$

$$B^{I}_{413} = \frac{-2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_1^{\mu\mu}\left[B^{\mu}_{\nu\xi}C^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\xi\nu}C^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \sum_1^{\mu\mu} B^{\mu}_{\xi\nu}C^{\xi}_{\varphi\delta} - \sum_1^{\mu\mu} G^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right)\right]$$

$$B^{I}_{423} = \frac{-2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_1^{\mu\mu}\left[C^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + C^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \frac{1}{2}\sum_3^{\mu\mu} B^{\mu}_{\nu\varphi}B^{\mu}_{\delta\xi}\right) - \sum_1^{\mu\mu} E^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right]$$

$$B^{I}_{433} = \frac{-2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_1^{\mu\mu}\left[C^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + C^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \frac{1}{2}\sum_3^{\mu\mu} B^{\mu}_{\nu\varphi}B^{\mu}_{\delta\xi}\right) - \sum_1^{\mu\mu} F^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right]$$

$$B^{I}_{443} = \frac{+2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_3^{\mu\mu}\left[B^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \frac{1}{2}\sum_3^{\mu\mu} B^{\mu}_{\nu\varphi}B^{\mu}_{\delta\xi}\right) - \sum_3^{\mu\mu} D^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right]$$

$$B^{II}_{463} = B^{I}_{443}$$

$$B^{I}_{463} = \frac{+2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_3^{\mu\mu}\left[B^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta}\right]\right) - \sum_3^{\mu\mu} D^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right]$$

$$B^{II}_{473} = \frac{-2}{A_\mu A_\mu A_\nu A_\varphi A_\delta}\left[\sum_\xi \frac{1}{A_\xi}\left(\sum_3^{\mu\mu}\left[2C^{\mu}_{\nu\xi}B^{\xi}_{\varphi\delta} + 2C^{\mu}_{\xi\nu}B^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\nu\xi}C^{\xi}_{\varphi\delta} + B^{\mu}_{\xi\nu}C^{\xi}_{\varphi\delta}\right] - \frac{1}{2}\sum_1^{\mu\mu} C^{\mu}_{\nu\xi}C^{\mu}_{\delta\xi}\right) - \sum_3^{\mu\mu}\left(E^{\mu}_{\nu\varphi\delta} + F^{\mu}_{\nu\varphi\delta} + G^{\mu}_{\nu\varphi\delta}\right)\right]$$

(E,4)

$$C_2^{III}(\mu) = - C_2^{II}(\mu)$$

$$C_3^{III}(\mu\sim\gamma) = C_{31}^{II}$$

$$C_4^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = C_{41}^{II} + C_{42}^{II}$$

$$B_2^{III}(\mu) = B_2^{II}(\mu)$$

$$B_{31}^{III}(\mu\sim\gamma) = B_{311}^{II}$$

$$B_{32}^{III}(\mu\sim\gamma) = B_{32}^{II}(\mu\sim\gamma)$$

$$B_{33}^{III}(\mu\sim\gamma) = B_{33}^{II}(\mu\sim\gamma)$$

$$B_{41}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = \frac{-1}{H_\mu H_\mu H H_\gamma H_\delta}\left\{\sum_\xi \frac{1}{H_\xi}\left(\sum_1^{n'}\left[B_{\sim\xi}^{n'} C_{\gamma\delta}^{\xi} + B_{\xi\sim}^{n'} C_{\gamma\delta}^{\xi}\right] - 2\sum_1^{n'} B_{\sim\xi}^{n'} C_{\gamma\delta}^{\xi}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_1^{n'} G_{\sim\gamma\delta}^{n'}\right\}$$

$$B_{42}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = \frac{-1}{H_\mu H_\mu H_\sim H_\gamma H_\delta}\left\{\sum_\xi \frac{1}{H_\xi}\left(\sum_1^{n'}\left[C_{\sim\xi}^{n'} B_{\gamma\delta}^{\xi} + C_{\xi\sim}^{n'} B_{\gamma\delta}^{\xi}\right] - \sum_3^{n'} B_{\sim\xi}^{n'} B_{\delta\xi}^{n'}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_1^{n'} E_{\sim\gamma\delta}^{n'}\right\}$$

$$B_{43}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = \frac{-1}{H_\mu H_\mu H_\sim H_\gamma H_\delta}\left\{\sum_\xi \frac{1}{H_\xi}\left(\sum_1^{n'}\left[C_{\sim\xi}^{n'} B_{\gamma\delta}^{\xi} + C_{\xi\sim}^{n'} B_{\gamma\delta}^{\xi}\right] - \sum_3^{n'} B_{\sim\xi}^{n'} B_{\delta\xi}^{n'}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_1^{n'} F_{\sim\gamma\delta}^{n'}\right\}$$

$$B_{44}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = B_{44}^{II}(\mu\sim\gamma\delta)$$

$$B_{45}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = B_{45}^{II}(\mu\sim\gamma\delta)$$

$$B_{46}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = B_{46}^{II}(\mu\sim\gamma\delta)$$

$$B_{47}^{III}(\mu\sim\gamma\delta) = B_{47}^{II}(\mu\sim\gamma\delta)$$

E,II Der Grundzustandserwartungswert in der Oberflächendarstellung

War es bei der Potential- und Quadrupoldarstellung der Energieerwartungswerte (VI,1) zum Vergleichen der Ansätze (III,2) und (III,4) sinnvoll, die einzelnen Massenfunktionen für jede Kombination der Zeitableitungen der kollektiven Parameter getrennt anzugeben, so ist diese Anordnung in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{a}_\mu\}$ nicht mehr übersichtlich möglich. Weiterhin ist es für den Koeffizientenvergleich mit den Funktionen des Hamilton-Ansatzes (F,1), (F,2) und für die grafische Darstellung günstiger, die einzelnen Funktionen geordnet nach den verschiedenen Komponenten der kollektiven Parameter $\tilde{\varepsilon}_\mu$ und $\dot{\tilde{\varepsilon}}_\mu$ zusammenzufassen, z.B.

(E,5)

$$\bar{B}_3^2(0,22) = B_{31}^2(022) + B_{32}^2(220) + B_{33}^2(202)$$

Bei dieser Anordnung lauten die Erwartungswerte (VI,1) in der Oberflächendarstellung

(E,6)

$$\begin{aligned} E_0^{\S} &= \mathcal{E}_0(\tilde{a}_\mu) \\ &+ \sum_\mu \mathcal{C}_2^{\S}(\mu\mu)\, a_\mu a_\mu + \sum_{\mu\nu} \mathcal{C}_3^{\S}(\mu\nu\varphi)\, a_\mu a_\nu a_\varphi + \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \mathcal{C}_4^{\S}(\mu\nu\varphi\sigma)\, a_\mu a_\nu a_\varphi a_\sigma \\ &+ \hbar^2 \sum_\mu \mathcal{D}_2^{\S}(\mu\mu)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\mu + \hbar^2 \sum_{\mu\nu} \mathcal{D}_3^{\S}(\mu,\nu\varphi)\, a_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\varphi \\ &+ \hbar^2 \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \mathcal{D}_4^{\S}(\mu\nu,\varphi\sigma)\, a_\mu a_\nu \dot{a}_\varphi \dot{a}_\sigma \\ &+ \hbar^4 \sum_{\mu\nu\varphi\sigma} \mathcal{D}_6^{\S}(\mu\nu\varphi\sigma)\, \dot{a}_\mu \dot{a}_\nu \dot{a}_\varphi \dot{a}_\sigma \end{aligned}$$

Im Folgenden soll diese Bezeichnung auch für die Potentialdarstellung $\{\hat{\varepsilon}\}$ benutzt werden. Dazu muß man in (E,5) die Parameter a_μ formal durch ε_μ ersetzen, wobei der Index $\S$ analog mit den Bezeichnungen in Absatz VI angibt, von welchem Ansatz ((III,2) oder (III,4)) ausgegangen wird. Es gilt:

(E,7)

$\S$ = 2, wenn H^{II} (III,2) in der $\{\hat{\varepsilon}\}$-Darstellung,
$\S$ = II, wenn H^{II} (III,2) in der $\{\hat{a}\}$-Darstellung,
$\S$ = 3, wenn H^{III} (III,4) in der $\{\tilde{\varepsilon}\}$-Darstellung und
$\S$ =III, wenn H^{III} (III,4) in der $\{\tilde{a}\}$-Darstellung benutzt wird.

Da die Massen- und Potentialfunktionen $\mathcal{L}_i^s$ und $\mathcal{X}_i^s$ in der Potentialdarstellung sich einfach aus den entsprechenden Funktionen (E,1) und (E,2) ergeben, werden hier nur die $\mathcal{L}_i^s$ und $\mathcal{X}_i^s$ in der Oberflächendarstellung angegeben.

Dazu ist es sinnvoll, die Transformationsgleichungen (D,6) wie folgt abzukürzen:

(E,8)

$$q_0 = L_1 a_0 + L_2 a_0^2 + L_3 a_0^3 + L_4 a_2^2 + L_5 a_0 a_2^2$$

$$q_2 = T_1 a_2 + T_2 a_0 a_2 + T_3 a_0^2 a_2 + T_4 a_2^3$$

Die Ausdrücke für die L_i und T_i sind durch (D,6) bestimmt.

(E,9)

$$\mathcal{L}_2^s(00) = \bar{B}_2^s(0)(L_1)^2$$

$$\mathcal{L}_2^s(22) = \bar{B}_2^s(2)(T_1)^2$$

$$\mathcal{L}_3^s(0,00) = \bar{B}_3^s(000)(L_1)^3 + \bar{B}_2^s(0)(4L_1L_2)$$

$$\mathcal{L}_3^s(0,22) = \bar{B}_3^s(022)(L_1T_1^2) + \bar{B}_2^s(0)(2T_1T_2)$$

$$\mathcal{L}_3^s(2,02) = \bar{B}_3^s(202)(L_1T_1^2) + \bar{B}_2^s(0)(4L_1L_4) + \bar{B}_2^s(2)(2T_1T_2)$$

$$\mathcal{L}_4^s(00,00) = \bar{B}_4^s(0000)(L_1)^4 + \bar{B}_3^s(000)(5L_1^2L_2) + \bar{B}_2^s(0)(4L_2^2 + 6L_1L_3)$$

$$\mathcal{L}_4^s(00,22) = \bar{B}_4^s(0022)(L_1^2T_1^2) + \bar{B}_3^s(022)(2T_1T_2L_1 + T_1^2L_2) + \bar{B}_2^s(2)(T_2^2 + 2T_1T_3)$$

$$\mathcal{L}_4^s(22,00) = \bar{B}_4^s(2200)(L_1^2T_1^2) + \bar{B}_3^s(202)(L_1T_1T_2) + \bar{B}_2^s(0)(2L_1L_4) + \bar{B}_2^s(2)(T_2^2)$$

$$\mathcal{L}_4^s(02,02) = \bar{B}_4^s(0202)(L_1^2T_1^2) + \bar{B}_3^s(000)(4L_1^2L_6) + \bar{B}_3^s(022)(2T_1T_2L_1)$$
$$+ \bar{B}_3^s(202)(L_1^2T_2 + 2L_2T_1^2 + L_1T_1T_2) + \bar{B}_2^s(0)(4L_1L_6 + 8L_3L_2)$$
$$+ \bar{B}_2^s(2)(4T_1T_3 + 2T_2T_3)$$

$$\mathcal{L}_4^s(22,22) = \bar{B}_4^s(2222)(T_1)^4 + \bar{B}_3(202)(2T_1L_3L_1) + \bar{B}_2^s(2)(6T_1T_4) + \bar{B}_2^s(0)(4T_1^2)$$

$$\mathcal{L}_6^{\S}(0000) = \bar{B}_6^{\S}(0000)(L_1)^4$$

$$\mathcal{L}_5^{\S}(0022) = \bar{B}_5^{\S}(0022)(L_1^2 T_1^2)$$

$$\mathcal{L}_5^{\S}(2222) = \bar{B}_6^{\S}(2222)(T_1)^4$$

$$\mathcal{L}_2^{\S}(00) = \bar{C}_2^{\S}(0)(L_1)^2$$

$$\mathcal{L}_2^{\S}(22) = \bar{C}_2^{\S}(2)(T_1)^2$$

$$\mathcal{L}_3^{\S}(000) = \bar{C}_3^{\S}(000)(L_1)^3 + \bar{C}_2^{\S}(0)(2L_1 L_2)$$

$$\mathcal{L}_3^{\S}(022) = \bar{C}_3^{\S}(022)(L_1 T_1^2) + \bar{C}_2^{\S}(2)(2T_1 T_2) + \bar{C}_2^{\S}(0)(2L_1 L_3)$$

$$\mathcal{L}_4^{\S}(0000) = \bar{C}_4^{\S}(0000)(L_1)^4 + \bar{C}_3^{\S}(000)(3L_1^2 L_2) + \bar{C}_2^{\S}(0)(L_2^2 + 2L_1 L_4)$$

$$\mathcal{L}_4^{\S}(0022) = \bar{C}_4^{\S}(0022)(L_1^2 T_1^2) + \bar{C}_3^{\S}(000)(3L_1^2 L_3) + \bar{C}_3^{\S}(022)(2T_1 T_2 L_1 + T_1^2 L_2)$$
$$+ \bar{C}_2^{\S}(0)(2L_1 L_5 + 2L_2 L_3) + \bar{C}_2^{\S}(2)(T_2^2 + 2T_1 T_3)$$

$$\mathcal{L}_4^{\S}(2222) = \bar{C}_4^{\S}(2222)(T_1)^4 + \bar{C}_2^{\S}(0)(L_3)^2 + \bar{C}_2^{\S}(2)(2T_1 T_4)$$

F Die Massen- und Potentialpolynome der kollektiven Hamiltonfunktion

Benutzt man die Zerlegung (VII,1)

$$\tilde{a}_\mu(t) = \bar{a}_\mu + a_\mu(t)$$

in dem Potentialansatz (A,2) und den Vibrationstermen (A,4) und ordnet man die Gleichungen wie in Anhang E,II (E,6), dann erhält man bei dem Potential in vierter Ordnung die folgenden Polynome.

(F,1)

$$\mathcal{U}^0 = C_2\bar{a}_0^2 - C_3\bar{a}_0^3 + C_4\bar{a}_0^4 - C_5\bar{a}_0^5 + (C_6+D_6)\bar{a}_0^6 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^1(0) = 2C_2\bar{a}_0 - 3C_3\bar{a}_0^2 + 4C_4\bar{a}_0^3 - 5C_5\bar{a}_0^4 + 6(C_6+D_6)\bar{a}_0^5 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^2(00) = C_2 - 3C_3\bar{a}_0 + 6C_4\bar{a}_0^2 - 10C_5\bar{a}_0^3 + 15(C_6+D_6)\bar{a}_0^4 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^2(22) = 2C_2 + 6C_3\bar{a}_0 + 4C_4\bar{a}_0^2 + 4C_5\bar{a}_0^3 - 6(C_6+D_6)\bar{a}_0^4 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^3(000) = -C_3 + C_4\bar{a}_0 - 10C_5\bar{a}_0^2 + 20(C_6+D_6)\bar{a}_0^3 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^3(022) = +6C_3 + 8C_4\bar{a}_0 + 12C_5\bar{a}_0^2 - 24(C_6+D_6)\bar{a}_0^3 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^4(0000) = +C_4 - 5C_5\bar{a}_0 + 15(C_6+D_6)\bar{a}_0^2 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^4(0022) = +4C_4 + 12C_5\bar{a}_0 - 36(C_6+D_6)\bar{a}_0^2 + \cdots$$

$$\mathcal{U}^4(2222) = +4C_4 + 12C_5\bar{a}_0 + 12(C_6+D_6)\bar{a}_0^2 + \cdots$$

Diese Beziehungen gelten nur auf der $\bar{E}_0$ bzw. $\bar{K}_0$ -Achse. Das Gleiche gilt für die Polynome, die man aus den Vibrationsanteilen der kinetischen Energie erhält.

(F,2)

$$\mathcal{L}^2(0) = B_2 - B_3\bar{a}_0 + (B_{40}+B_{42}+B_{44})\bar{a}_0^2$$

$$\mathcal{L}^2(2) = -2B_2 + 2B_3\bar{a}_0 + (4B_{40}-2B_{42}+3B_{44})\bar{a}_0^2$$

$$\mathcal{L}^{3}(000) = -B_3 + (2B_{40} + 2B_{42} + 18B_{44})\,\bar{a}_0 + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{3}(022) = +2B_3 + (4B_{40} \; 4B_{42} + 6B_{44})\,\bar{a}_0 + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{3}(202) = +4B_3 + (\quad 16B_{42} + 60B_{44})\,\bar{a}_0 + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{4}(0000) = +(B_{40} + B_{42} + B_{44}) + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{4}(0022) = +(2B_{40} - 2B_{42} + 3B_{44}) + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{4}(2200) = +(2B_{40} - 2B_{42} + 3B_{44}) + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{4}(0202) = +(\quad 8B_{42} + 60B_{44}) + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{4}(2222) = +(4B_{40} + 4B_{42} + 71B_{44}) + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{5}(0000) = B_5 + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{5}(0022) = 4B_5 + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{5}(2222) = 4B_5 + \cdots$$

Literaturverzeichnis

1) A. Bohr; Dan. Mat. Fys. Medd. 26, no. 14 (1952)

2) A. Bohr, B. R. Mottelson; Dan. Mat. Fys. Medd. 27, no. 16 (1953)

3) R. Fraser; Nucl. Phys. A177 (1971)

4) S. G. Nilsson, et. al.; Nucl. Phys. A131 (1969)

5) J. M. Eisenberg, W. Greiner; Nuclear Models I und III, North Holland Pub. Comp., Amsterdam - London (197o) (1971)

6) G. Gneuß, W. Greiner; Nucl. Phys. A171 (1971)

7) T. D. Urbas; Diplomarbeit, Universität Frankfurt/Main (1966)

8) A. Grauel; private Mitteilung und Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt (1967)

9) V. Rezwani, M. Brand, R. Sedlmayr, L. v. Bernus, U. Schneider, W. Greiner; Proceedings of the Int. Conf. on Nuclear Structure, Sendai, Japan, 12. - 15. September 1972
L. v. Bernus, U. Schneider, W. Greiner; to be published in Nuovo Cimento (1973)
A. Habs; preprint (1973)

1o) D. M. Brink, A. Weiguny; Nucl. Phys. A12o (1968)
J. J. Griffin, J. A. Wheeler; Phys. Rev. 1o8 (1957)

11) D. J. Thouless, R. E. Peierls; Nucl. Phys. 38 (1962)
R. E. Peierls, J. Yoccoz; Proc. Phys. Soc. A7o (1957)

12) T. Marumori, M. Yamamura, Y. Miyanishi, S. Nishiyama; Prog. Theor. Phys. Suppl. (1968)
R. M. Dreizler; to be published in Phys. Rev. C (1973)

13) D. J. Rowe; Nuclear Collective Motion, Models and Theory, Methuen and Co. Ltd., London (197o)

15) M. Baranger, K. Kumar; Nucl. Phys. 62 (1965), Nucl. Phys. Allo (1968), Nucl. Phys. A122 (1968)

16) S. T. Belyaev; Dan. Mat. Fys. Medd. 31, no. 11 (1959)

17) A. K. Kerman; Ann. of Phys. 12 (1961)

18) S. G. Nilsson; Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 no. 16 (1955)
C. Gustavson, et. al.; Arkiv f. Fysik 36 no. 69 (1967)

19) A. S. Dawydow; Quantenmechanik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1967)

20) D. R. Bès; Mat. Fys. Med. Dan. Vis. Selsk. 33, no. 2 (1961)

21) U. Mosel, W. Greiner; Z. Physik 222 (1969)
J. Grumann, U. Mosel, B. Fink, W. Greiner; Z. Physik 228 (1969)
S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustavson, I. L. Lamm, P. Möller, B. Nilsson; Nucl. Phys. A131 (1969)

22) M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis, J. K. Wooten, Jr.; The 3-j and 6-j Symbols, The Technology Press, Cambridge, Massachusetts (1959)

23) B. Fink; Dissertation, Universität Frankfurt/Main (1969)

24) Nuclear Data Sheets 6 - 4 - 65 (1964), Washington Nat. Acad. of Sciences (1958 - 1965)

25) V. M. Strutinsky; Nucl. Phys. A95 (1967), Nucl. Phys. A122 (1968)

26) W. D. Myers, W. J. Swiatecki; Nucl. Phys. 81 (1966), Arkiv f. Fysik 36 (1966)

27) A. Faessler, W. Greiner; Z. Physik 168 (1962)

28) J. Grumann, T. Morović, W. Greiner; Z. Naturforschung 26a (1971)

29) L. v. Bernus; Diplomarbeit, Universität Frankfurt/Main (1971)

30) D. R. Inglis; Phys. Rev. 96 (1954)

31) A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, S. G. Nilsson, J. R. Nix, C. F. Tsang, C. Gustavson, P. Möller, B. Nilsson; Nucl. Phys. A131, (1969)
M. Brach, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinski, C. Y. Wong; Rev. of Mod. Phys. Vol. 44 No. 2 (1972)

32) L. Wilets; Theories of Nuclear Fission, Clarendon Press, Oxford (1964)
L. I. Schiff; Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1955)

33) J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schriefer; Phys. Rev. 108 (1957)

34) private Mitteilung

35) H. L. Acker; Dissertation, Universität Freiburg i. Br. (1965)

Tabelle

Die Potentialkonstanten C_i, die aus $\mathcal{L}_0$ (VI,3) mit dem Strutinsky-Verfahren für $_{68}Er^{98}$ berechnet werden.

C_2 = -2o1.99 MeV
C_3 = 134.22 MeV
C_4 = 322o.25 MeV
C_5 = 233.38 MeV
C_6 = -1o734.oo MeV
D_6 = 1264.87 MeV

Die Potentialkonstanten C_i, die in den Fig. 16 und 17 verwendet werden.

C_2 = -25o.oo MeV
C_3 = 5294.5o MeV
C_4 = 18812.5o MeV

Die Massenkonstanten P_i der H-Funktion (A,6) (Laborsystem), die aus den Massenfunktionen $\mathcal{L}_i^j(\mu\cdots)$ (E,6) für $_{68}Er^{98}$ berechnet wurden.

I folgt aus dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Oberflächendarstellung
II folgt aus dem Ansatz H^{III}(III,4) in der Oberflächendarstellung
III folgt aus dem Ansatz H^{III}(III,4) in der Potentialdarstellung
IV folgt aus dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Potentialdarstellung

	I	II	III	IV	
P_2	o.o22oo	o.o22oo	o.o2144	o.o2144	10^{4o} MeV^{-1} sec^{-2}
P_3	-3.o4	6.o3	14.o9	5.82	" " "
P_{4o}	-131.57	-127.15	-9.21	13.41	" " "
P_{42}	-34.94	-3o.71	74.61	42.o3	" " "
P_{44}	5.69	-1.86	-5o.27	-26.74	" " "
P_5	6o.oo	6o.oo	26.62	26.86	10^{8o} MeV^{-3} sec^{-4}

Die Massenkonstanten B_i der H-Funktion (I,3) (körperfestes Bezugssystem), die aus den Massenfunktionen $\mathcal{A}_4'(\mu\cdots)$ (E,6) für $_{68}Er^{98}$ berechnet wurden. Es werden die gleichen Bezeichnungen benutzt wie bei der vorherigen Tabelle.

	I	II	III	IV	
B_2	56.81	56.81	58.3o	58.3o	10^{-42} MeV sec^2
B_3	78.49	-155.77	-383.o4	-158.24	" " "
B_{4o}	3371.43	3182.95	-334.94	-464.6o	" " "
B_{42}	947.12	97o.72	-98o.1o	-963.87	" " "
B_{44}	-183.32	-95.36	522.72	583.23	" " "
B_5	-13327.86	-13327.86	-6559.23	-6618.95	10^{-84} MeV^3 sec^4

Figurenbeschreibung

Fig. 1 Übereinstimmung des mikroskopisch berechneten Q-Momentes $\bar{q}_0(\bar{\varepsilon}_0)$ (V,3) mit dem klassischen $Q^{kl}_{20}(\bar{a}_0)$ (V,9) an den Extrema der PES $\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_0)$ (VI,3). Es wurde die Abszisse für die statischen Deformationsparameter $\bar{a}_0$ und $\bar{\varepsilon}_0$ in dem gleichen Maßstab gezeichnet. Die Kurven wurden für den Kern $_{68}Er^{92}$ berechnet (siehe Seite 23).

Fig. 2 Bestimmung der Transformationsfunktionen $\bar{a}_0 = \bar{a}_0(\bar{\varepsilon}_0)$ und $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_0(\bar{a}_0)$ für $_{68}Er^{98}$. Aus dem Vergleich des klassischen Q-Momentes (Fig. 2a) mit dem mikroskopisch berechneten (Fig. 2b) erhält man numerisch die Funktion $\bar{a}_0 = \bar{a}_0(\bar{\varepsilon}_0)$ (Fig. 2c) (siehe Seite 73).

Fig. 3a Die statische kollektive Energie $\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_0)$ (VI,3) und die PES, die mit dem Strutinsky-Verfahren aus $\mathcal{E}_0$ berechnet wurde. In dem oberen Teil der Figur wurde der Neutronen- und Protonengap angegeben.

Fig. 3b Die statische kollektive Energie $\mathcal{E}_0$ (VI,3) in der Potential- und Oberflächendarstellung.

Fig. 4a Schnitte der PES $V(\bar{a}_0, \gamma)$ (II,3), deren Potentialkonstanten aus der mit dem Strutinsky-Verfahren berechneten PES (Fig. 3a) bestimmt wurden. Es sind in der $\{a_0, \gamma\}$-Darstellung in 10°-Abständen Schnitte gezeichnet wurden, deren Minima mit einer punktierten Linie verbunden wurden.

Fig. 4b Die Höhenlinien der PES $V(\bar{a}_0, \gamma)$ (II,3). Der Abstand der Linien beträgt o.5 MeV.

Fig. 5 Die Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{II}(\mu\cdots)$ (E,6) des Ansatzes H^{II} (III,2) in der Oberflächendarstellung.

5a: 2. Ord. Massenfunktionen, die mit den Funktionen des Ansatzes H^{III} (III,4) übereinstimmen.

5b: 3. Ord. Massenfunktionen

5c: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{I}(00,00)$, $\mathcal{L}_4^{II}(00,22)$

5d: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{II}(22,00)$, $\mathcal{L}_4^{I}(02,02)$, $\mathcal{L}_4^{II}(22,22)$

5e: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_5^{I}(\mu\mu,\nu\nu)$

Fig. 6 Die Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{III}(\mu\cdots)$ (E,6) des Ansatzes H^{III} (III,4) in der Oberflächendarstellung.

6a: 3. Ord. Massenfunktionen

6b: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{III}(00,00)$, $\mathcal{L}_4^{III}(00,22)$

6c: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{III}(22,00)$, $\mathcal{L}_4^{III}(02,02)$, $\mathcal{L}_4^{III}(22,22)$

6d: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_5^{III}(\mu\mu\nu\nu)$

Fig. 7 Die Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{2}(\mu\cdots)$ (E,6) des Ansatzes H^{II} (III,2) in der Potentialdarstellung.

7a: 2. Ord. Massenfunktionen, die mit den Funktionen des Ansatzes H^{III} (III,4) übereinstimmen.

7b: 3. Ord. Massenfunktionen

7c: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{2}(00,00)$, $\mathcal{L}_4^{2}(00,22)$

7d: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{2}(22,00)$, $\mathcal{L}_4^{2}(02,02)$, $\mathcal{L}_4^{2}(22,22)$

7e: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_5^{2}(\mu\mu\nu\nu)$

Fig. 8 Die Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{3}(\mu\cdots)$ (E,6) des Ansatzes H^{III} (III,4) in der Potentialdarstellung.

8a: 3. Ord. Massenfunktionen

8b: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{3}(00,00)$, $\mathcal{L}_4^{3}(00,22)$

8c: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_4^{3}(22,00)$, $\mathcal{L}_4^{3}(02,02)$, $\mathcal{L}_4^{3}(22,22)$

8d: 4. Ord. Massenfunktionen $\mathcal{L}_5^{3}(\mu\mu\nu\nu)$

Fig. 9a Die Massenkonstanten $P_i = P_i(\varkappa')$ (i = 2,3,4) der H-Funktion (A,6) in dem Laborsystem, die als Funktion der Stärke $\varkappa'$ der Q-Q-Kraft aus dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Potentialdarstellung berechnet wurden.

Fig. 9b Die Spektren, die aus den Massenkonstanten $P_i = P_i(\varkappa')$ berechnet werden (siehe Fig. 9a). Das experimentelle Spektrum stammt von $_{68}Er^{98}$. Die Potentialkonstanten C_i wurden aus $\mathcal{E}_o$ (VI,3) mit dem Strutinski-Verfahren berechnet.

Fig. 1o Vergleich der aus den beiden Ansätzen berechneten Spektren mit den Niveaus von $_{68}Er^{98}$.

Spektrum I folgt aus dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{a}\}$

Spektrum II folgt aus dem Ansatz H^{III} (III,4) in der Oberflächendarstellung $\{\tilde{a}\}$

Spektrum III folgt aus dem Ansatz H^{III} (III,4) in der Potentialdarstellung $\{\tilde{\varepsilon}\}$

Spektrum IV folgt aus dem Ansatz H^{II} (III,2) in der Potentialdarstellung, wobei die Stärke $\varkappa' = o.ooo5$ angenommen wurde (Fig. 9a und 9b). Die Massenkonstanten C_i wurden aus $\mathcal{E}_o$ (VI,3) mit dem Strutinski-Verfahren berechnet.

Fig. 11 bis 14 Untersuchung über den Einfluß der einzelnen Terme der kollektiven kinetischen Energie (A,6) mit den berechneten Massen- und Potentialkonstanten, deren Spektren in Fig. 1o mit den Niveaus von $_{68}Er^{98}$ verglichen werden.

11a: Grundzustands- und β-Bande von Spektrum I

11b: γ-Bande von Spektrum I

12a: Grundzustands- und β-Bande von Spektrum II

12b: γ-Bande von Spektrum II

13a: Grundzustands- und β-Bande von Spektrum III

13b: γ-Bande von Spektrum III

14a: Grundzustands- und β-Bande von Spektrum IV

14b: γ-Bande von Spektrum IV

Fig. 15 Systematische Untersuchung über den Einfluß der 4. Ordnungsterme der kollektiven kinetischen Energie (A,6), die proportional $\alpha^2 \dot{\alpha}^2$ sind. Es wurden die Massenkonstanten C_i verwendet, die aus $\mathcal{E}_o$ (VI,3) mit dem Strutinski-Verfahren für $_{68}Er^{98}$ berechnet wurden. Die mit Pfeilen markierten Spektren ergeben eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Niveaus von $_{68}Er^{98}$.

15a: Grundzustands- und β-Bande, wenn ein oder drei P_{4i}-Terme wirken

15b: γ-Bande, wenn ein oder drei P_{4i}-Terme wirken

15c: Grundzustands- und β-Bande, wenn zwei P_{4i}-Terme wirken

15d: γ-Bande, wenn zwei P_{4i}-Terme wirken

15e: Vergleich der mit Pfeilen markierten Spektren mit den Niveaus von $_{68}Er^{98}$.

Fig. 16a und b Wie in Fig. 15. Es wurde $C_2 = -250$ MeV, $C_3 = 5294.5$ MeV und $C_4 = 18812.5$ MeV angenommen. Der logarithmische Maßstab wurde gewählt, um die relativen Änderungen der Niveaus zu verdeutlichen. In Fig. 16a wurde das Spektrum von $_{68}Er^{98}$ gezeichnet.

Fig. 17 Systematische Untersuchung über den Einfluß der 4. Ordnungsterme der kollektiven kinetischen Energie (A,6), die proportional $\dot{\alpha}^2$ und $\dot{\alpha}^4$ sind. Es wurden die Potentialparameter wie in Fig. 16 benutzt.

17a: Änderung des Spektrums bei der Variation von P_5

17b: Änderung des Spektrums bei der Variation von P_5 und P_2.

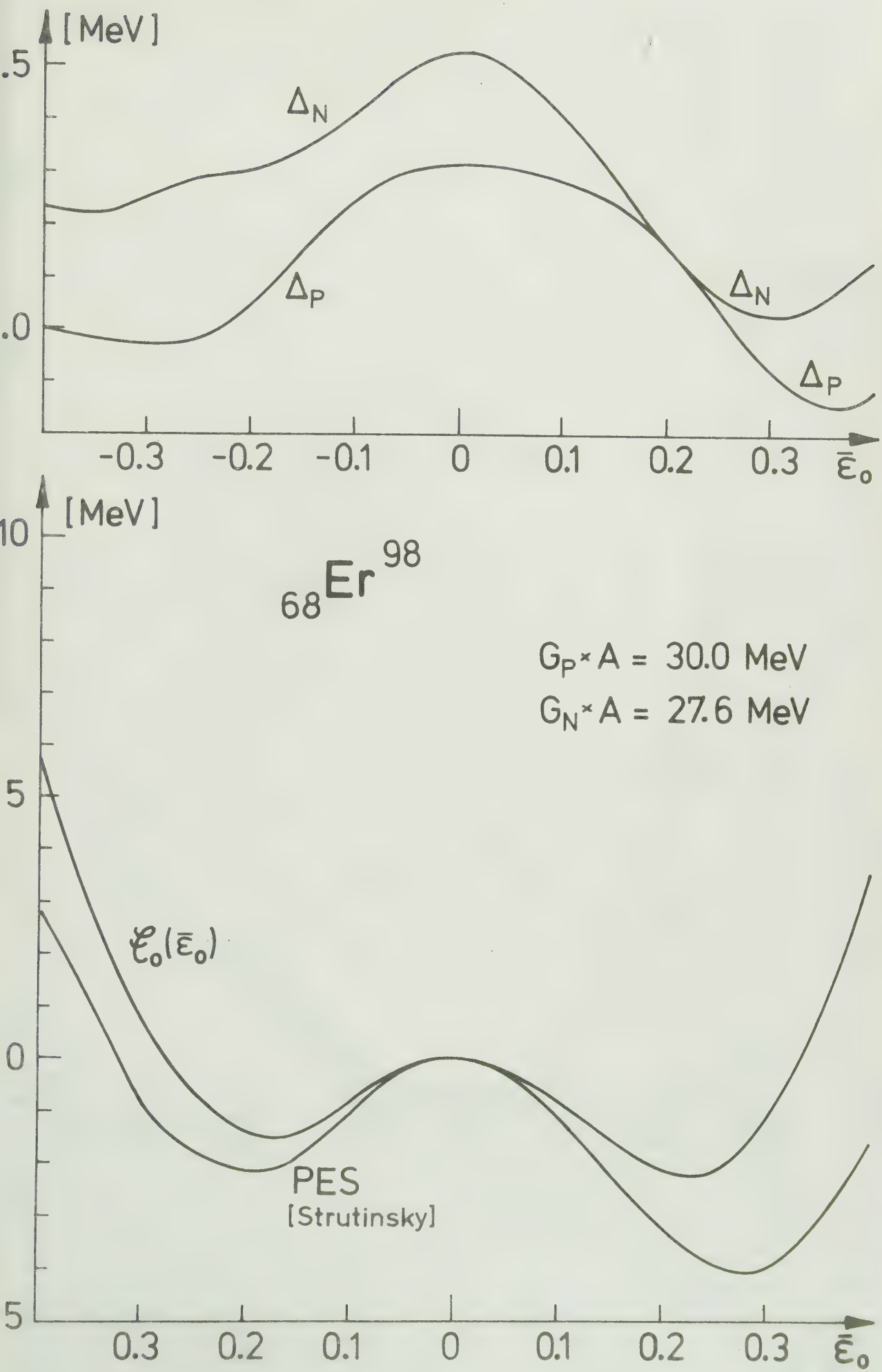

[MeV]
.5
.0
Δ_N
Δ_P
Δ_N
Δ_P
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{\varepsilon}_0$
[MeV]
10
$_{68}Er^{98}$
$G_P \times A = 30.0$ MeV
$G_N \times A = 27.6$ MeV
5
$\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_0)$
0
PES
[Strutinsky]
5
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 3a

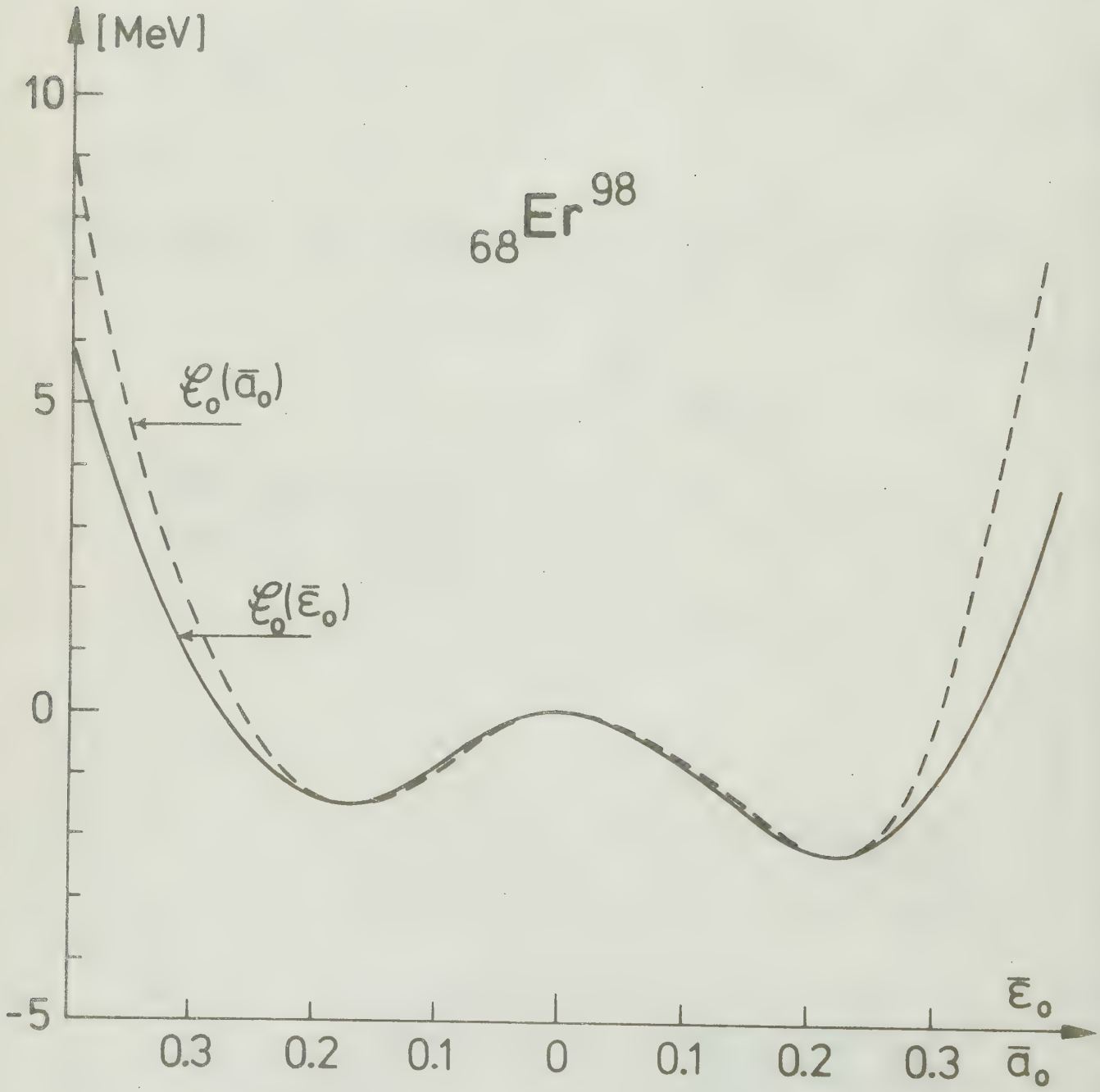
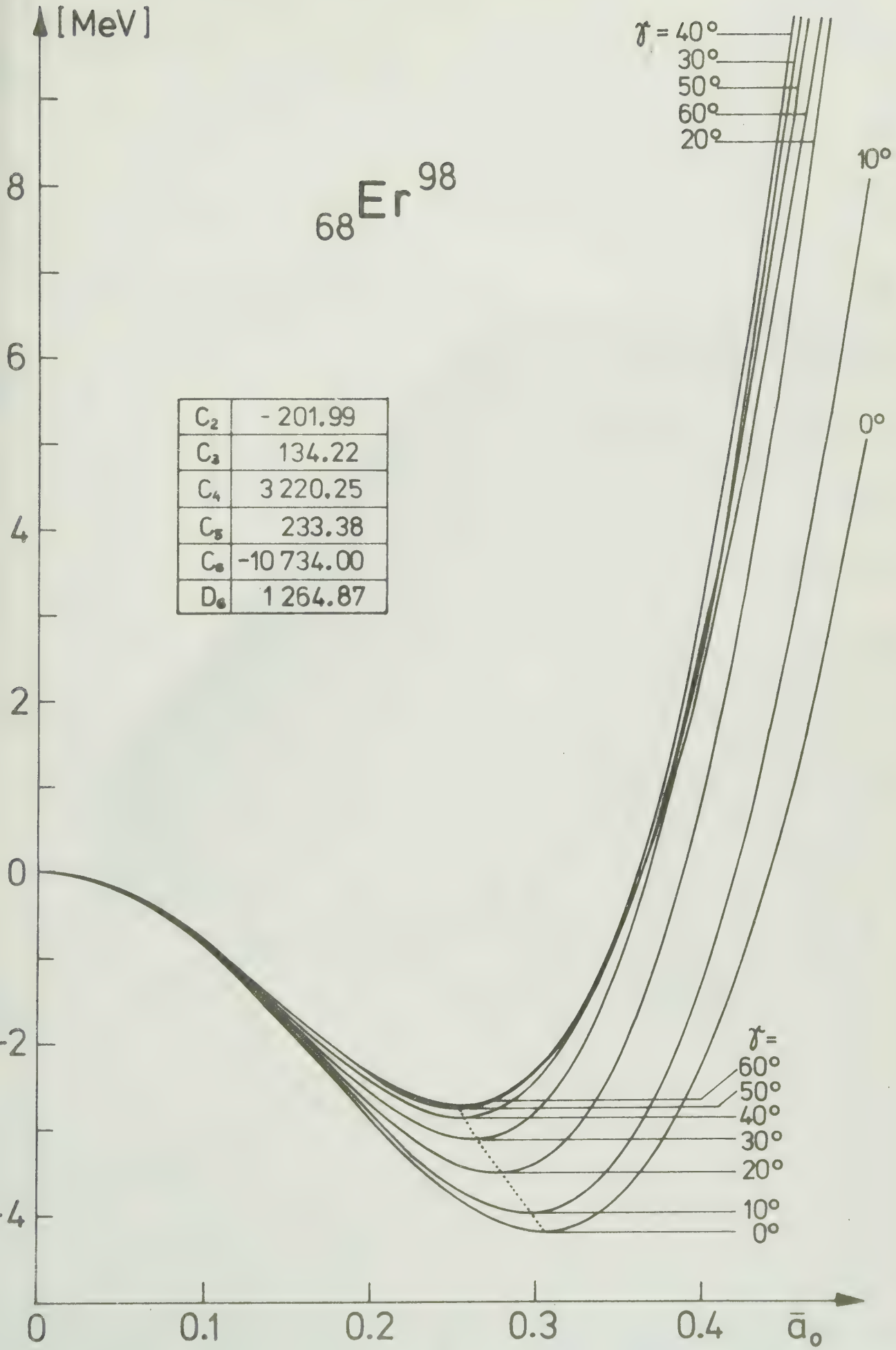

[MeV]
10
5
0
-5
$_{68}Er^{98}$
$\mathcal{E}_0(\bar{a}_0)$
$\mathcal{E}_0(\bar{\varepsilon}_0)$
$\bar{\varepsilon}_0$
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig. 3b



C_2	- 201.99
C_3	134.22
C_4	3 220.25
C_5	233.38
C_6	-10 734.00
D_6	1 264.87

Fig. 4a

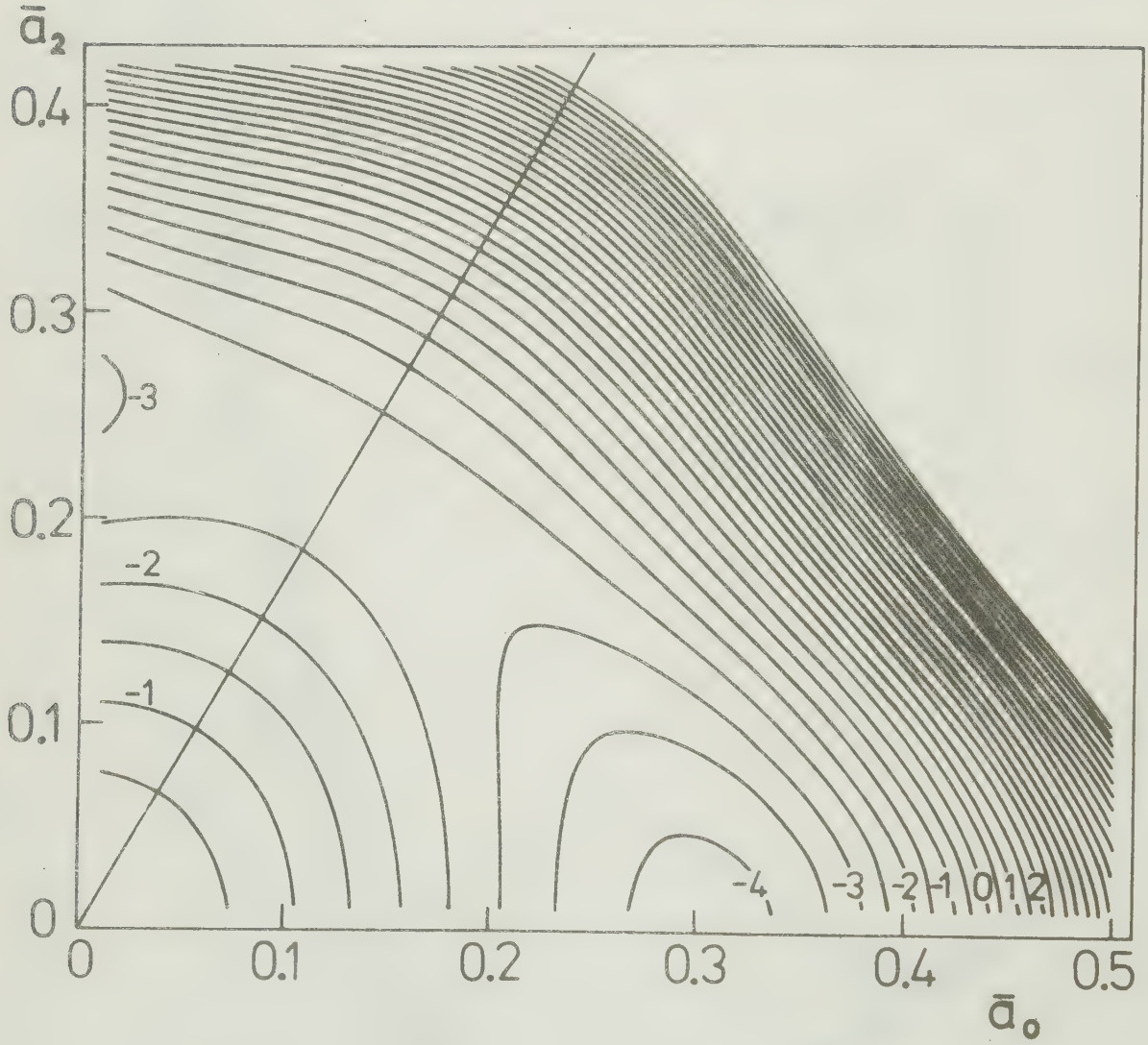


Fig. 4b

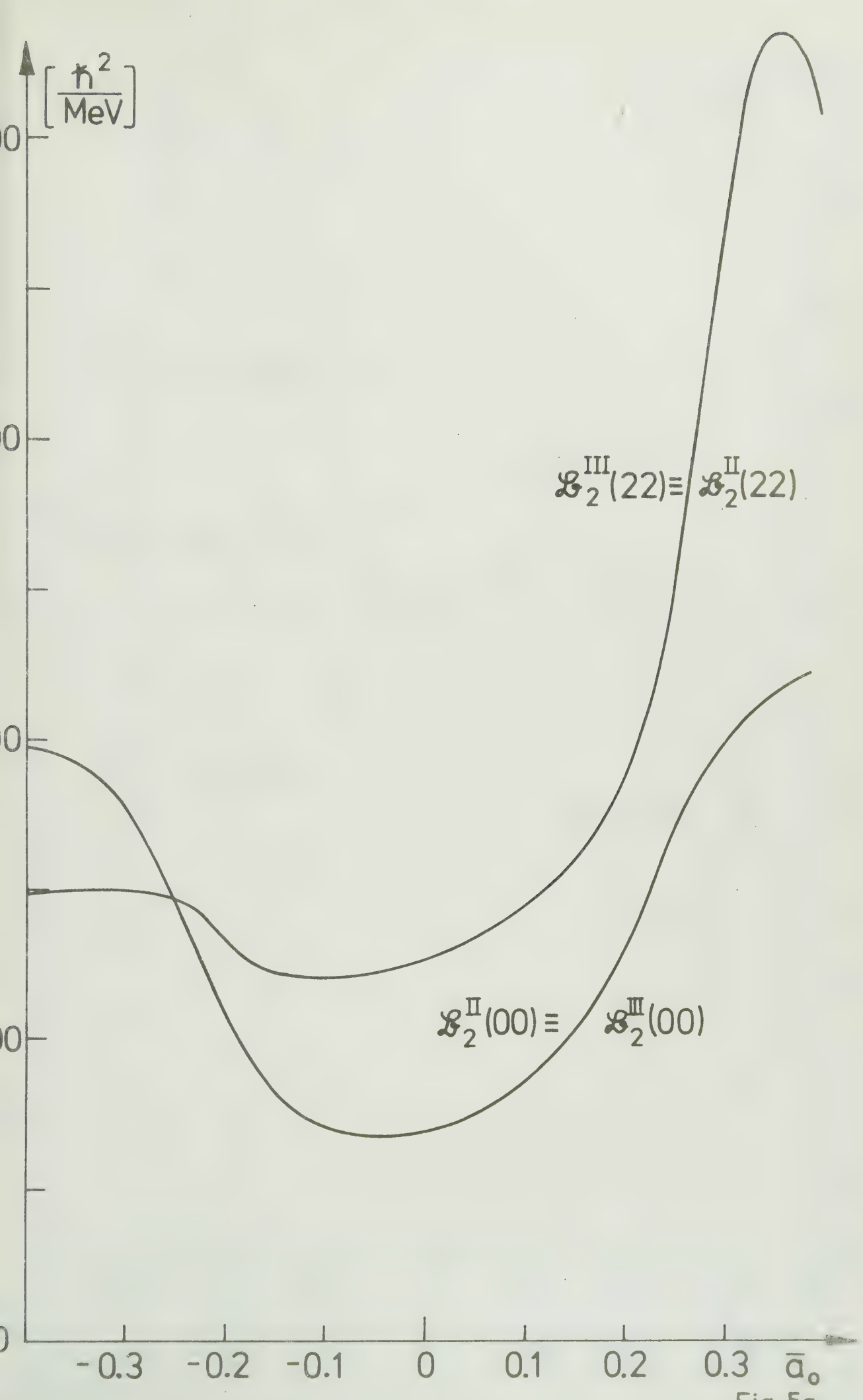

$\left[\frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
$\mathcal{L}_2^{III}(22) \equiv \mathcal{L}_2^{II}(22)$
$\mathcal{L}_2^{II}(00) \equiv \mathcal{L}_2^{III}(00)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_o$

Fig. 5a

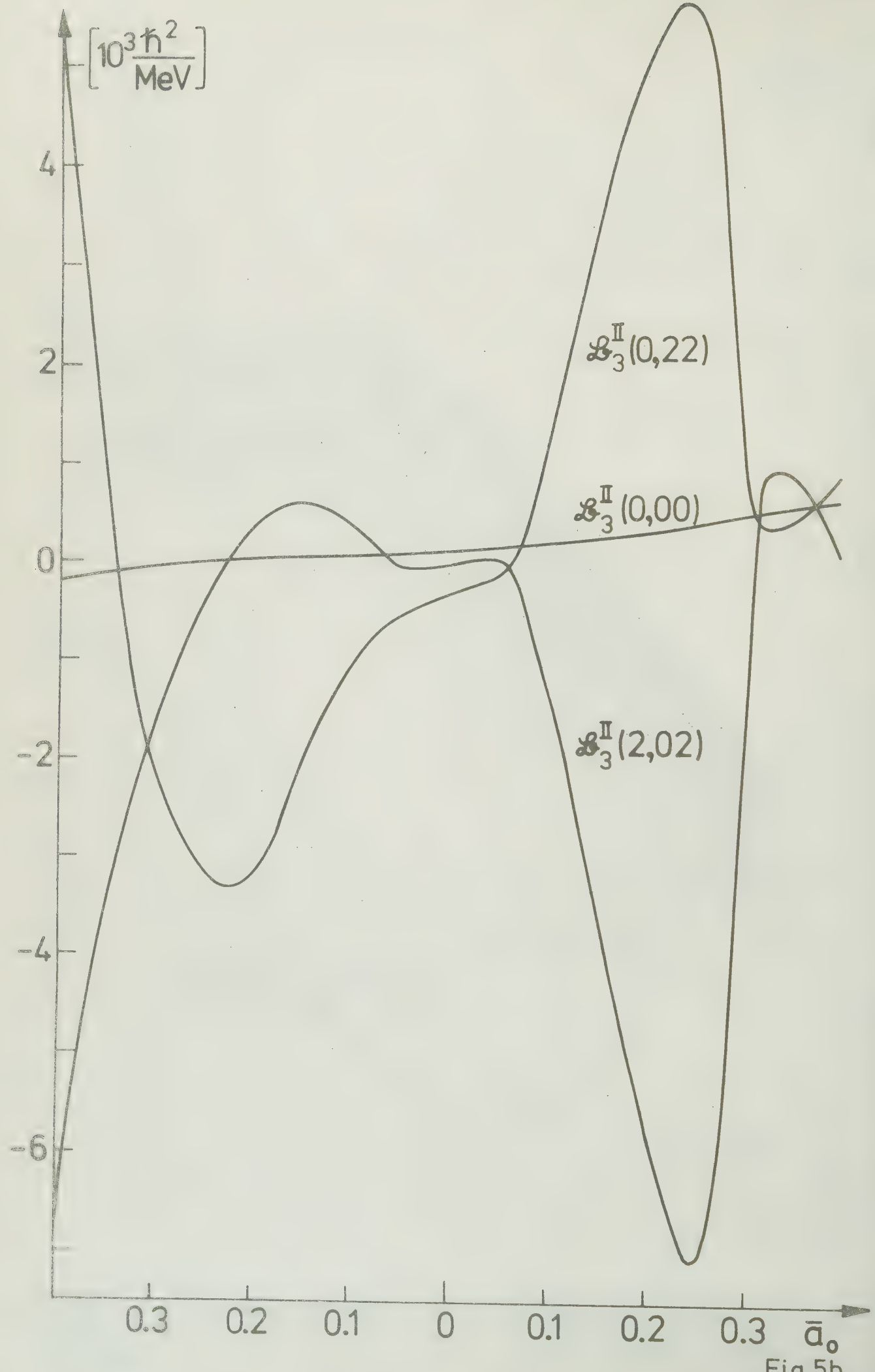

$[10^3 \frac{\hbar^2}{MeV}]$
4
2
0
-2
-4
-6
$\mathcal{L}_3^{II}(0,22)$
$\mathcal{L}_3^{II}(0,00)$
$\mathcal{L}_3^{II}(2,02)$
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_o$

Fig.5b

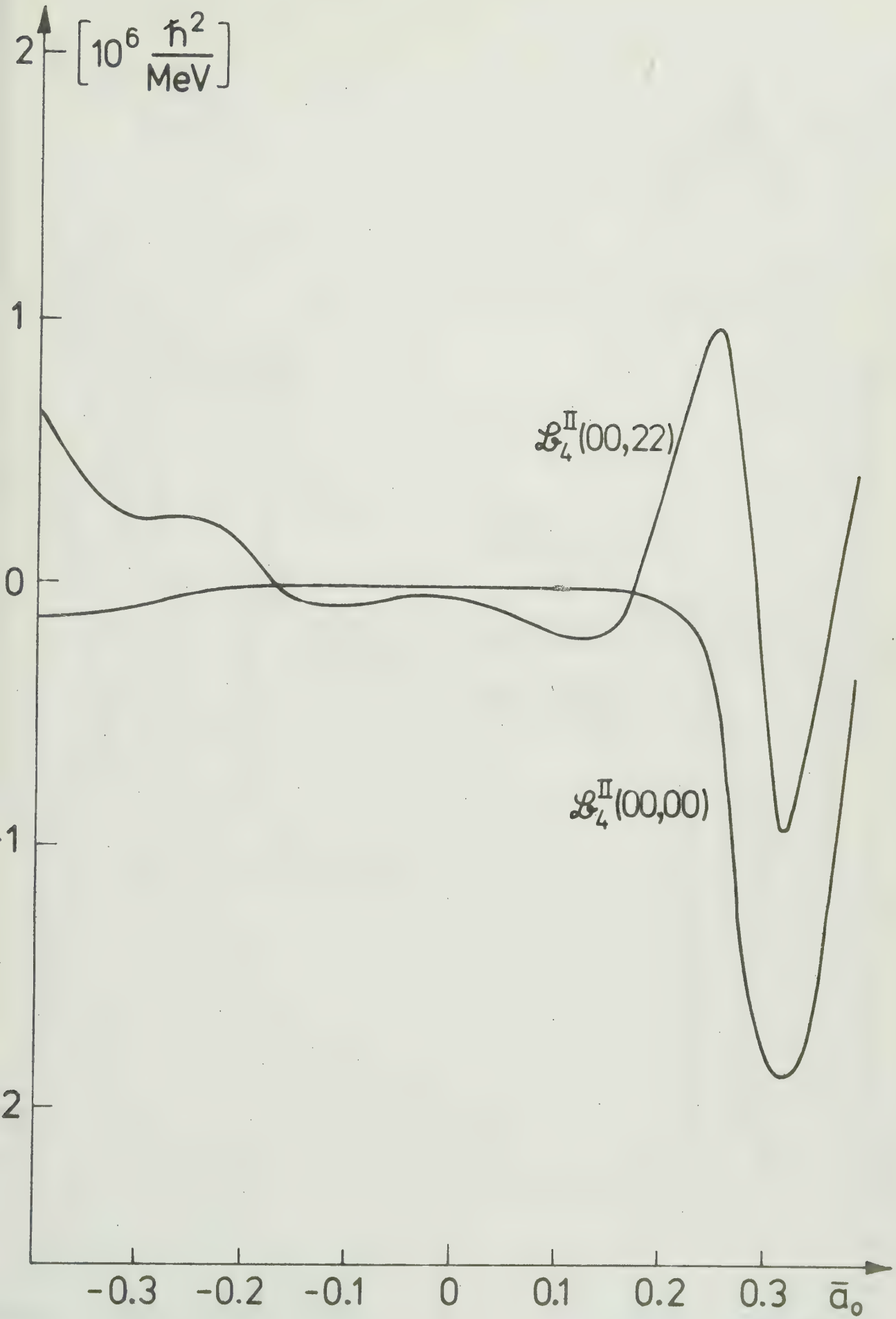

$\left[10^6 \frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
2
1
0
-1
2
$\mathcal{L}_4^{II}(00,22)$
$\mathcal{L}_4^{II}(00,00)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig. 5c

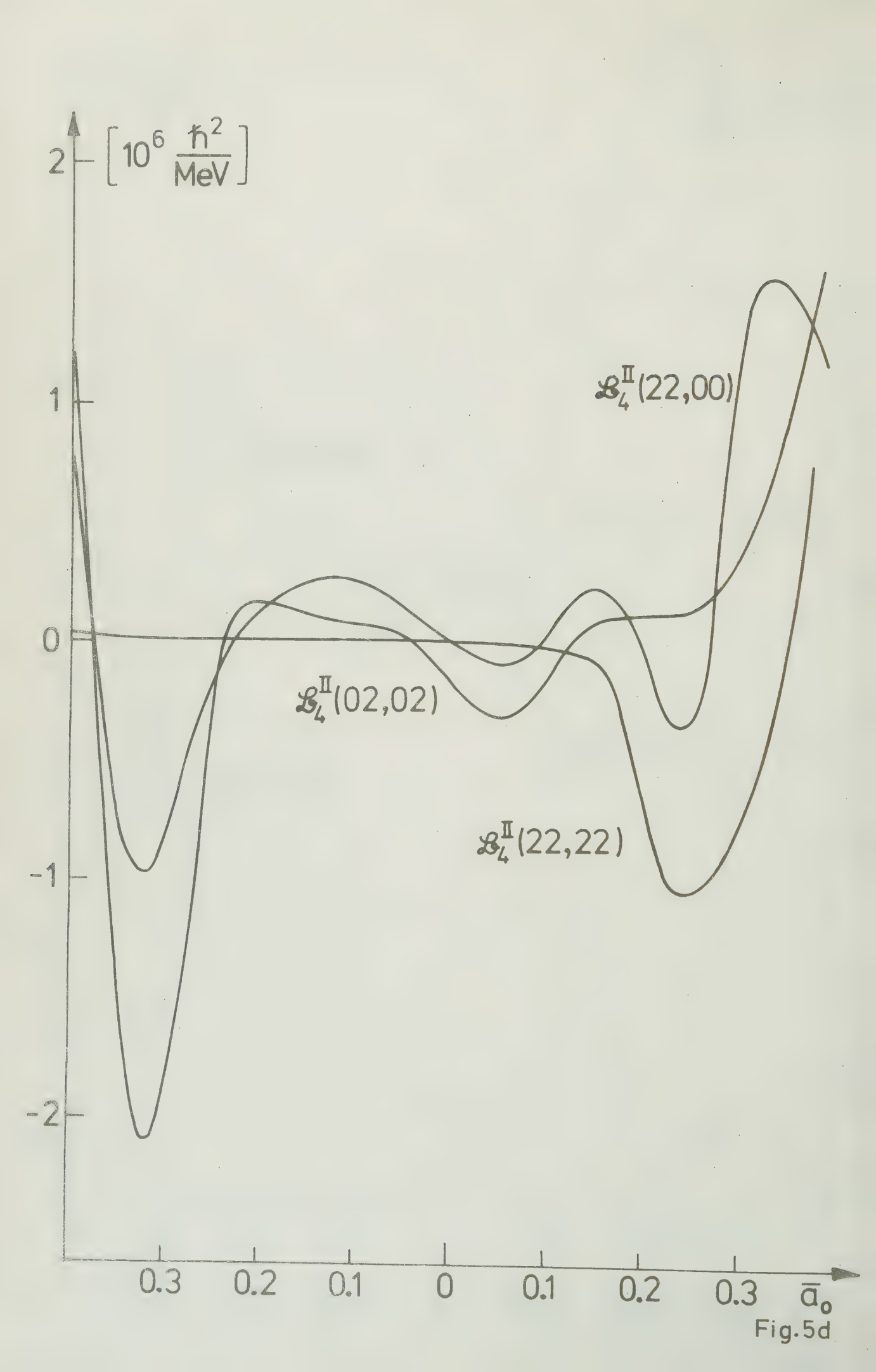

$10^6 \frac{\hbar^2}{MeV}$
2
1
0
-1
-2
$\mathcal{L}_4^{II}(22,00)$
$\mathcal{L}_4^{II}(02,02)$
$\mathcal{L}_4^{II}(22,22)$
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig.5d

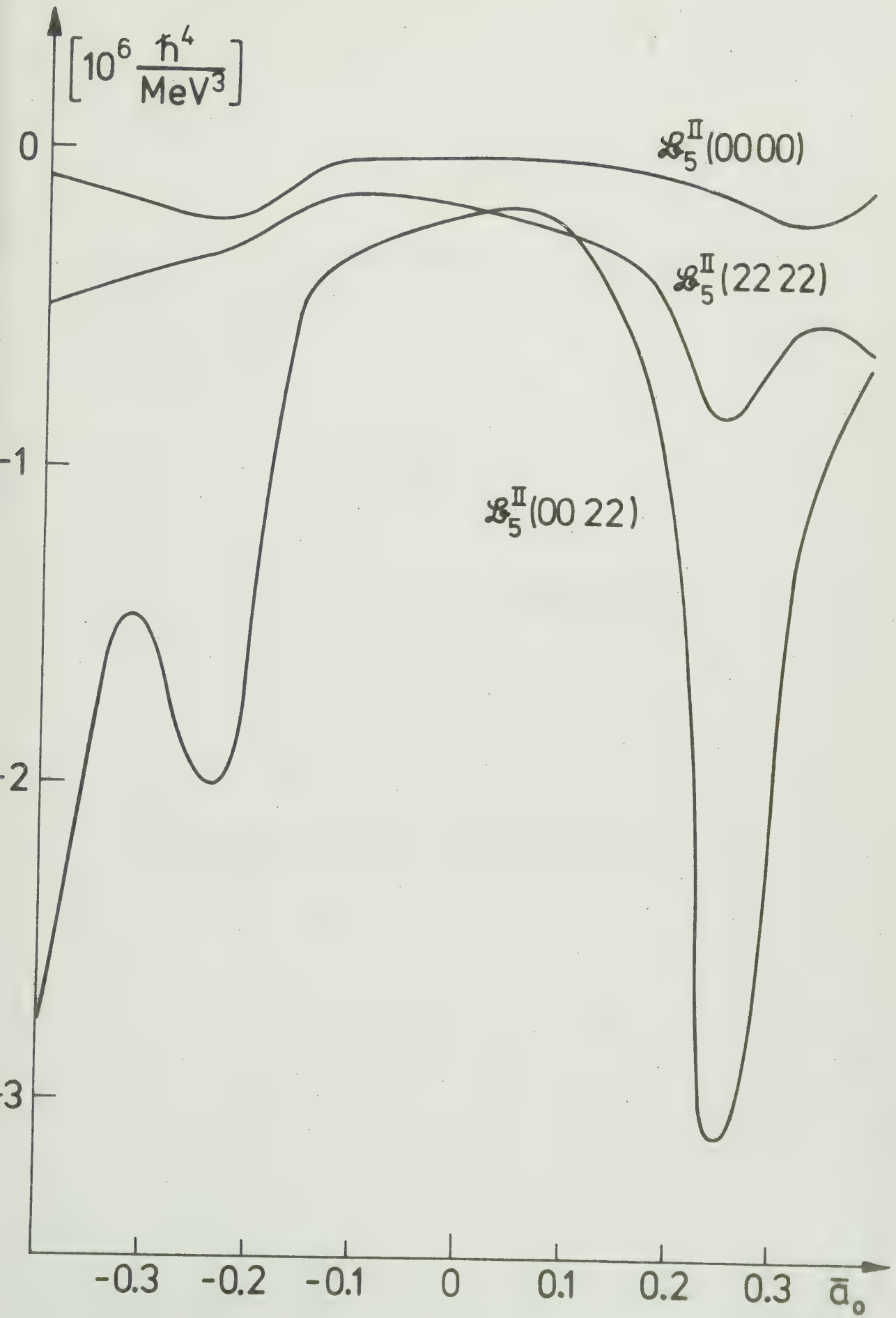

$\left[10^6 \frac{\hbar^4}{MeV^3}\right]$
0
-1
-2
-3
$\mathscr{L}_5^{II}(0000)$
$\mathscr{L}_5^{II}(2222)$
$\mathscr{L}_5^{II}(0022)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig. 5e

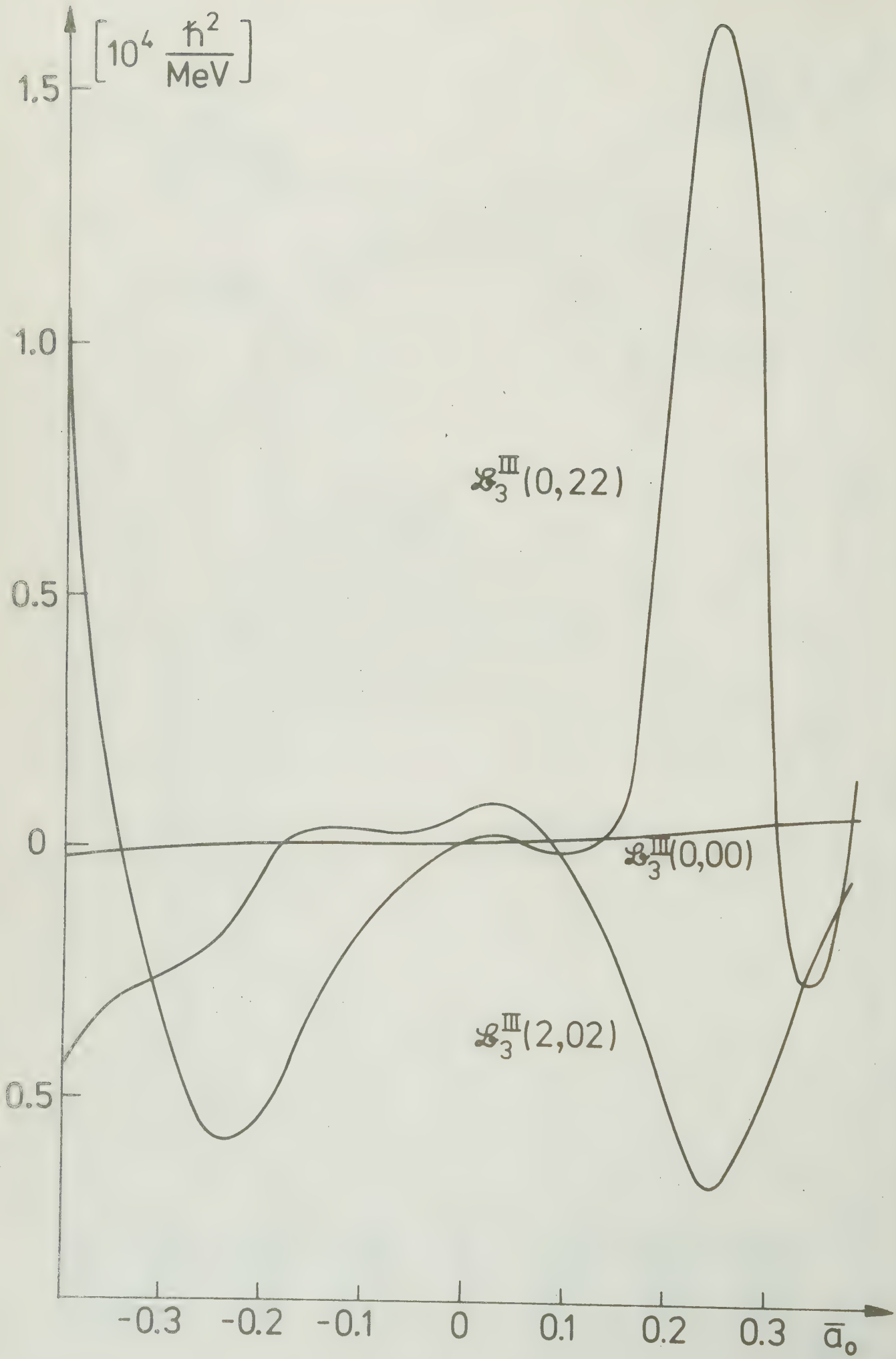

$[10^4 \frac{\hbar^2}{MeV}]$
1.5
1.0
0.5
0
0.5
$\mathcal{B}_3^{III}(0,22)$
$\mathcal{B}_3^{III}(0,00)$
$\mathcal{B}_3^{III}(2,02)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_o$

Fig. 6a

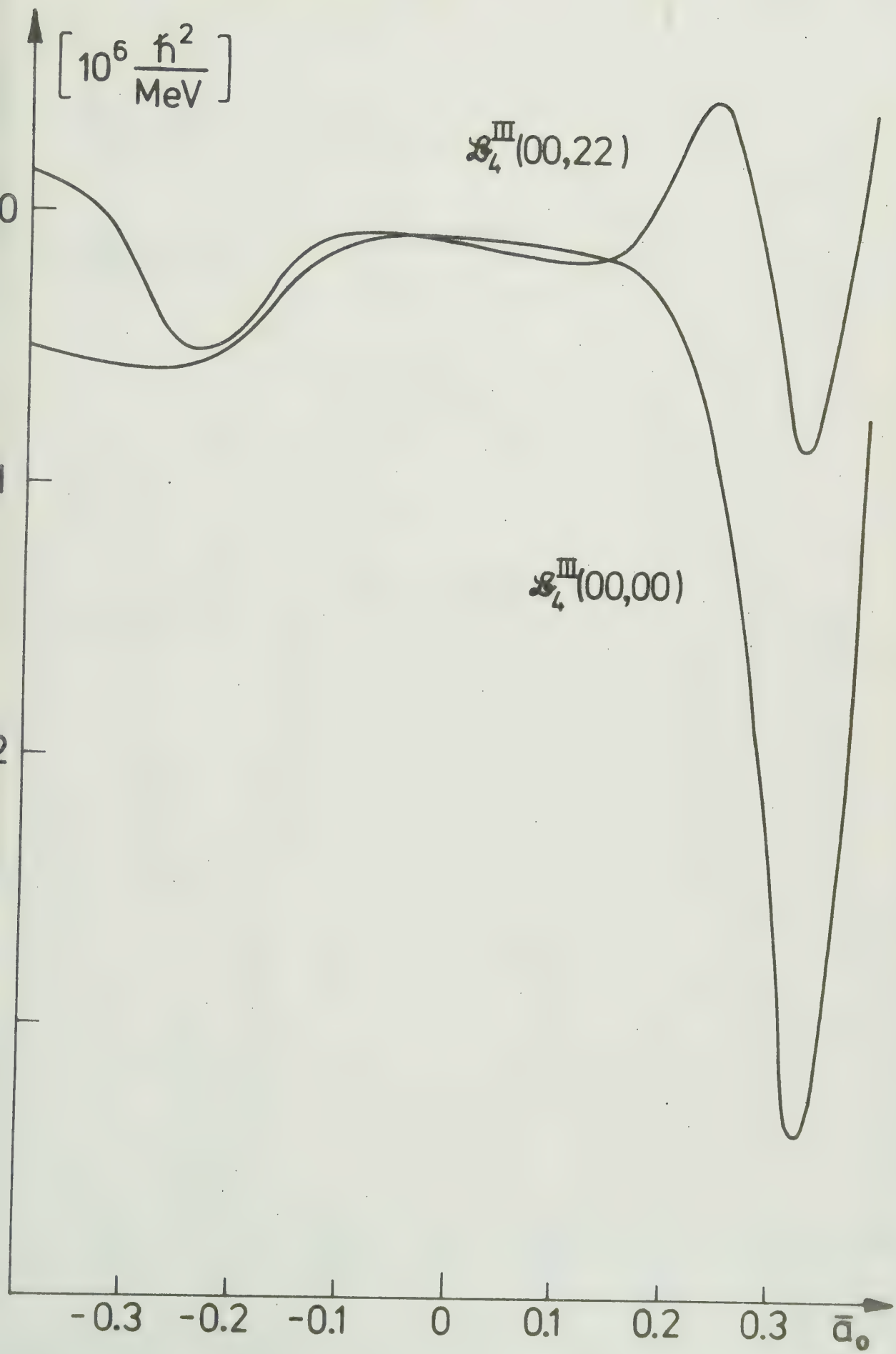
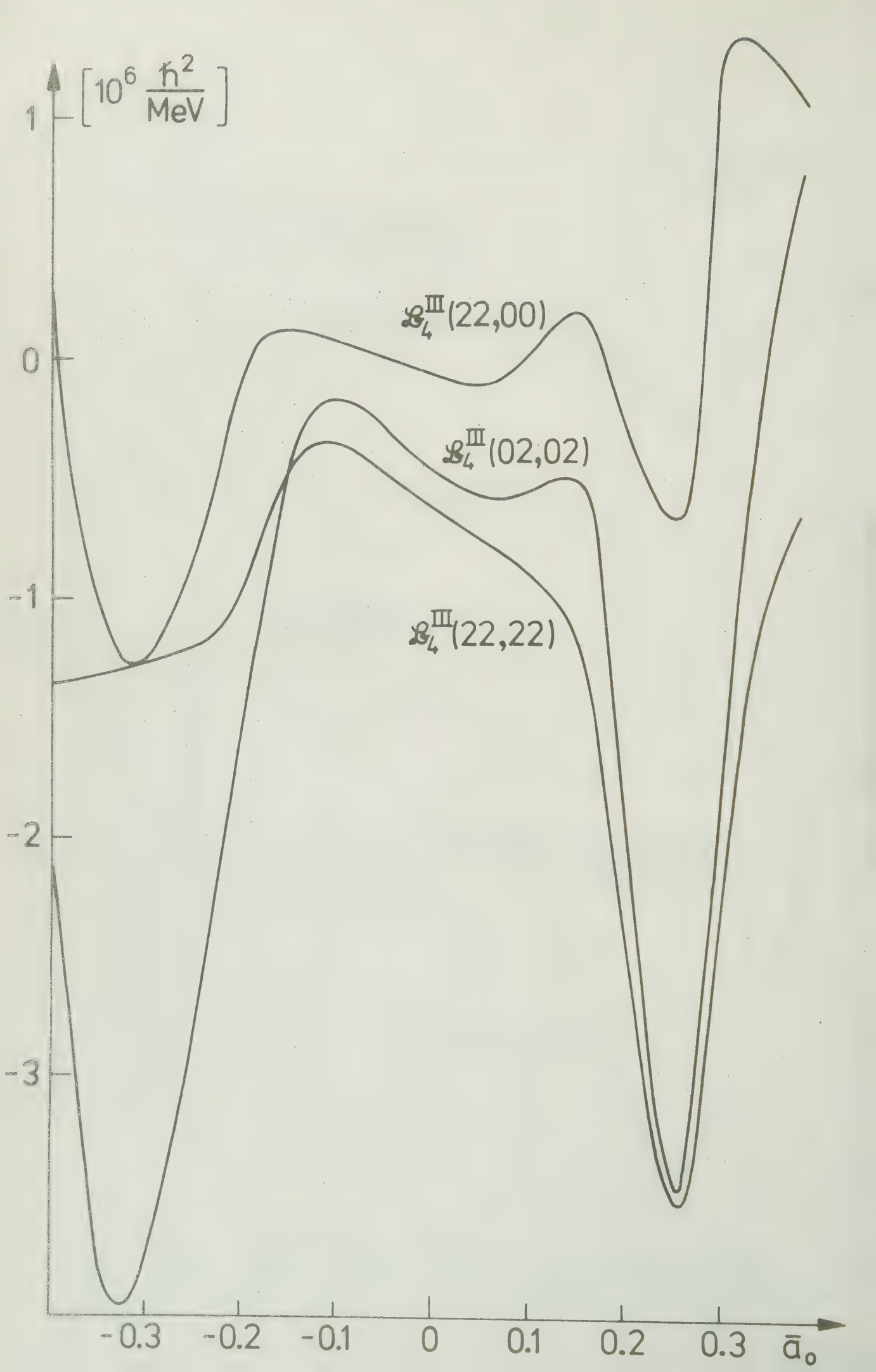

$[10^6 \frac{\hbar^2}{MeV}]$
$\mathcal{B}_4^{III}(00,22)$
$\mathcal{B}_4^{III}(00,00)$
0
1
2
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig. 6b


$\left[10^6 \frac{\hbar^2}{\text{MeV}}\right]$
1
0
-1
-2
-3
$\mathcal{B}_4^{III}(22,00)$
$\mathcal{B}_4^{III}(02,02)$
$\mathcal{B}_4^{III}(22,22)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

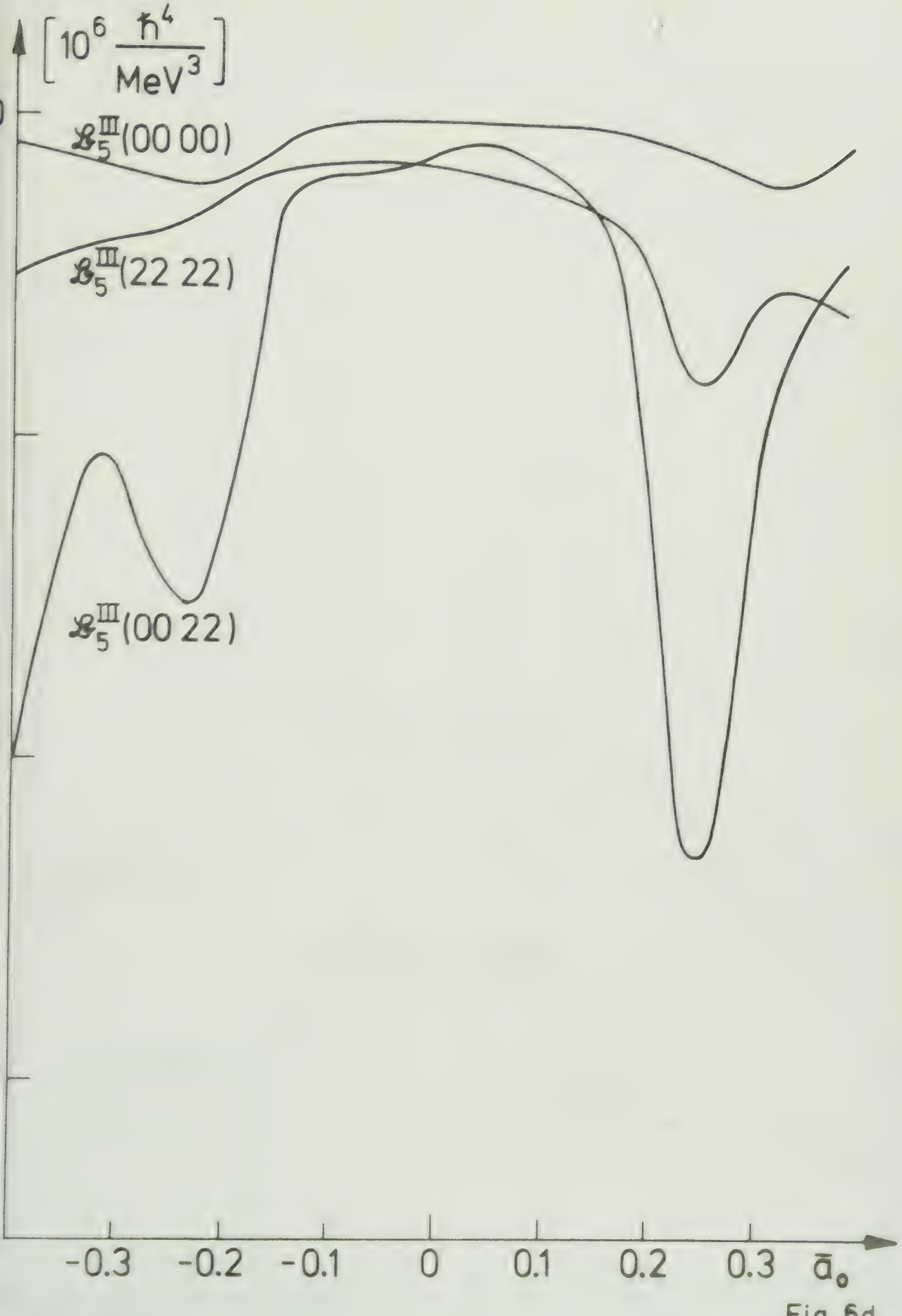

$\left[10^6 \frac{\hbar^4}{MeV^3}\right]$
$\mathcal{B}_5^{III}(00\,00)$
$\mathcal{B}_5^{III}(22\,22)$
$\mathcal{B}_5^{III}(00\,22)$
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
$\bar{a}_0$

Fig. 6d

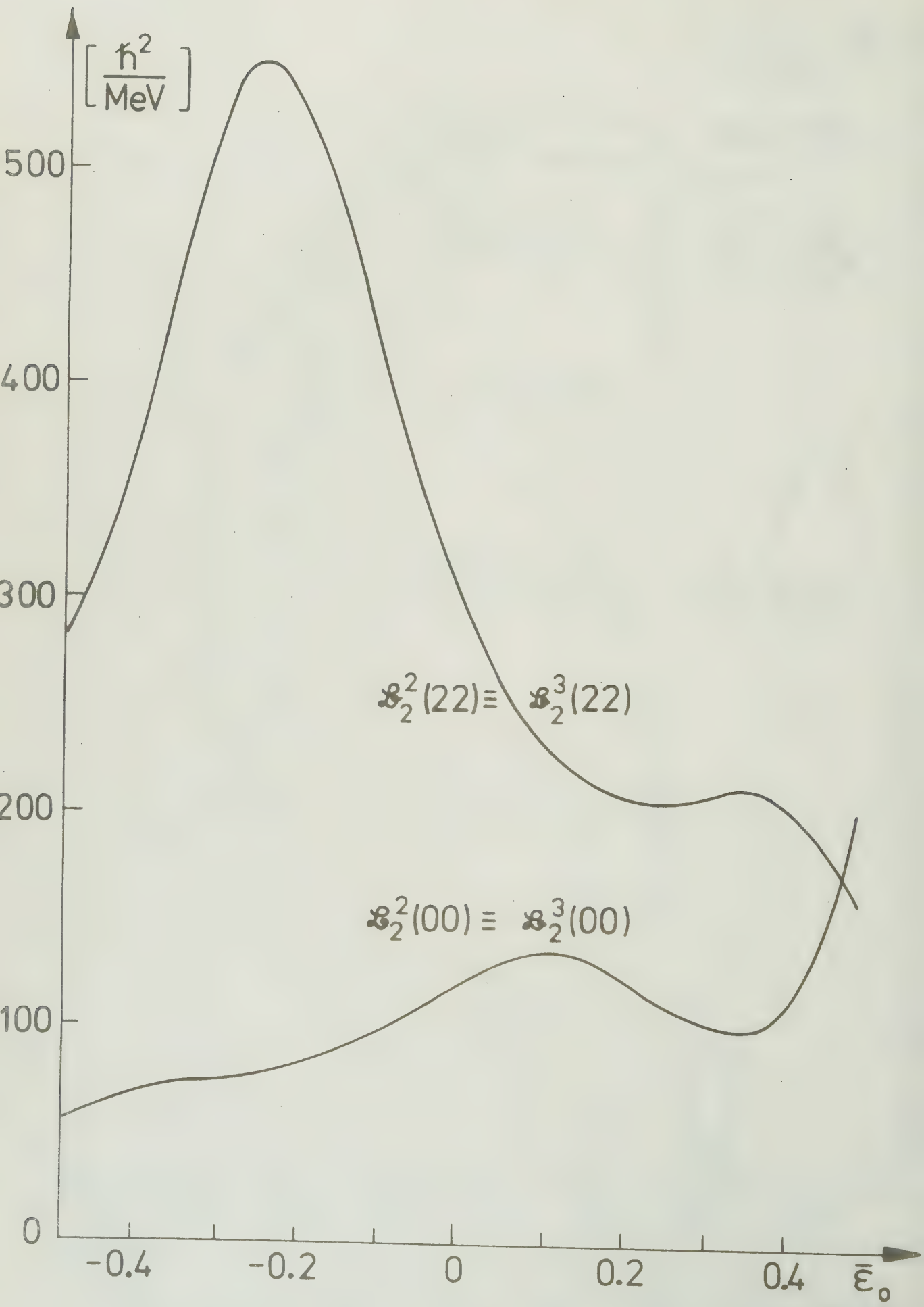

$\left[\frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
500
400
300
200
100
0
$\mathcal{B}_2^2(22) \equiv \mathcal{B}_2^3(22)$
$\mathcal{B}_2^2(00) \equiv \mathcal{B}_2^3(00)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 7a

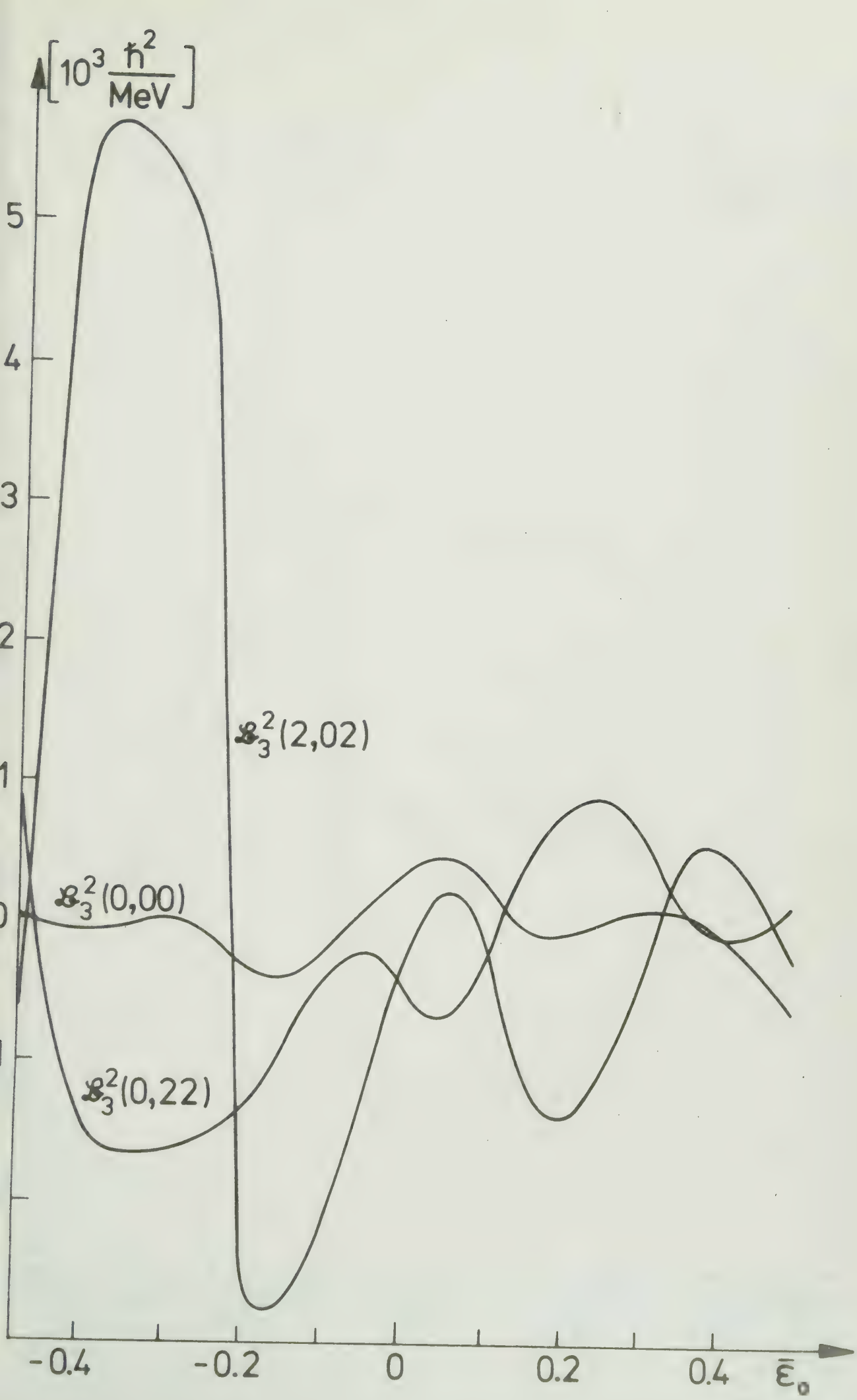

$[10^3 \frac{\hbar^2}{MeV}]$
5
4
3
2
1
0
$\mathscr{B}_3^2(2,02)$
$\mathscr{B}_3^2(0,00)$
$\mathscr{B}_3^2(0,22)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 7b

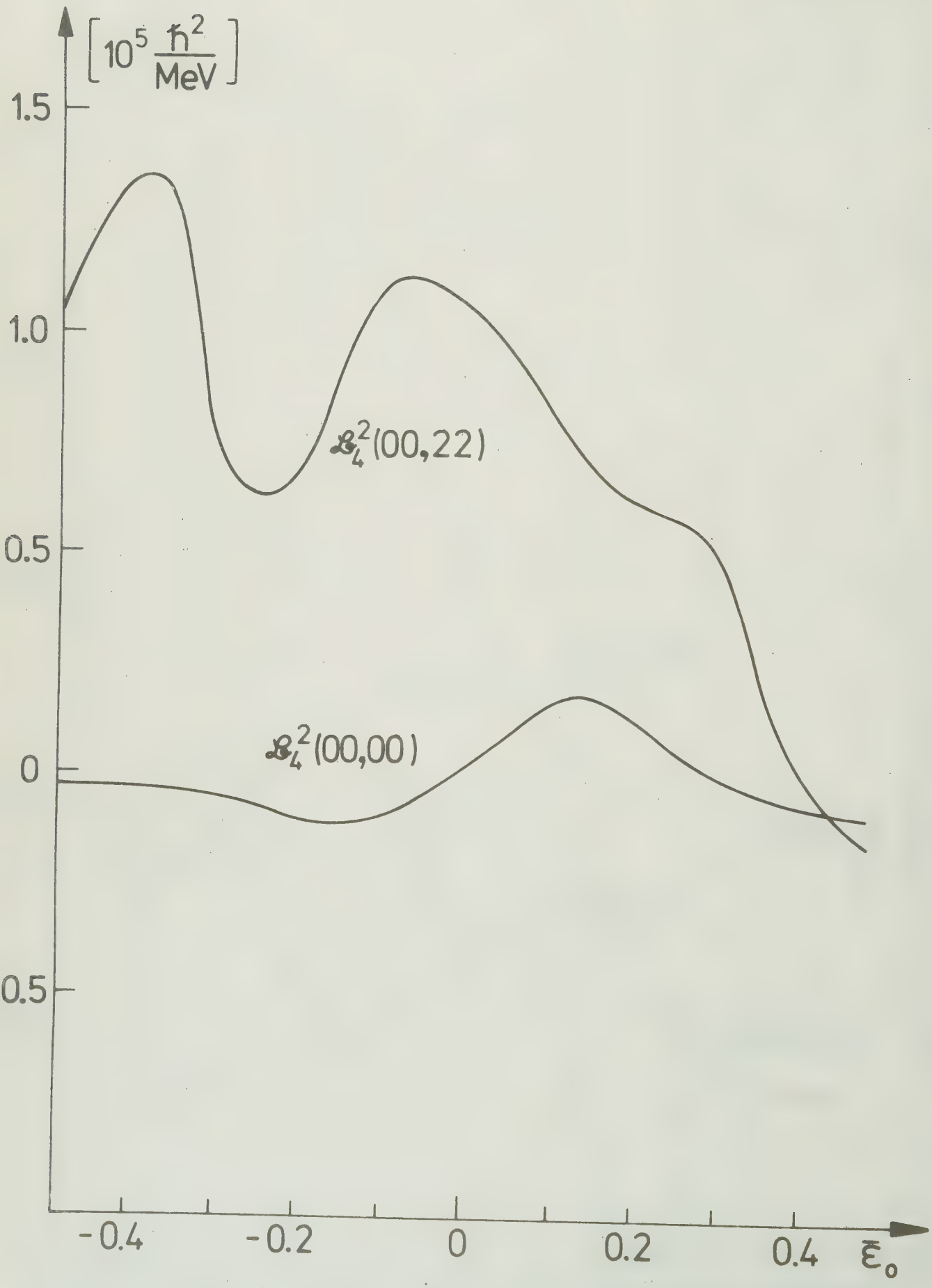

$\left[10^5 \frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
1.5
1.0
0.5
0
0.5
$\mathcal{B}_4^2(00,22)$
$\mathcal{B}_4^2(00,00)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 7c

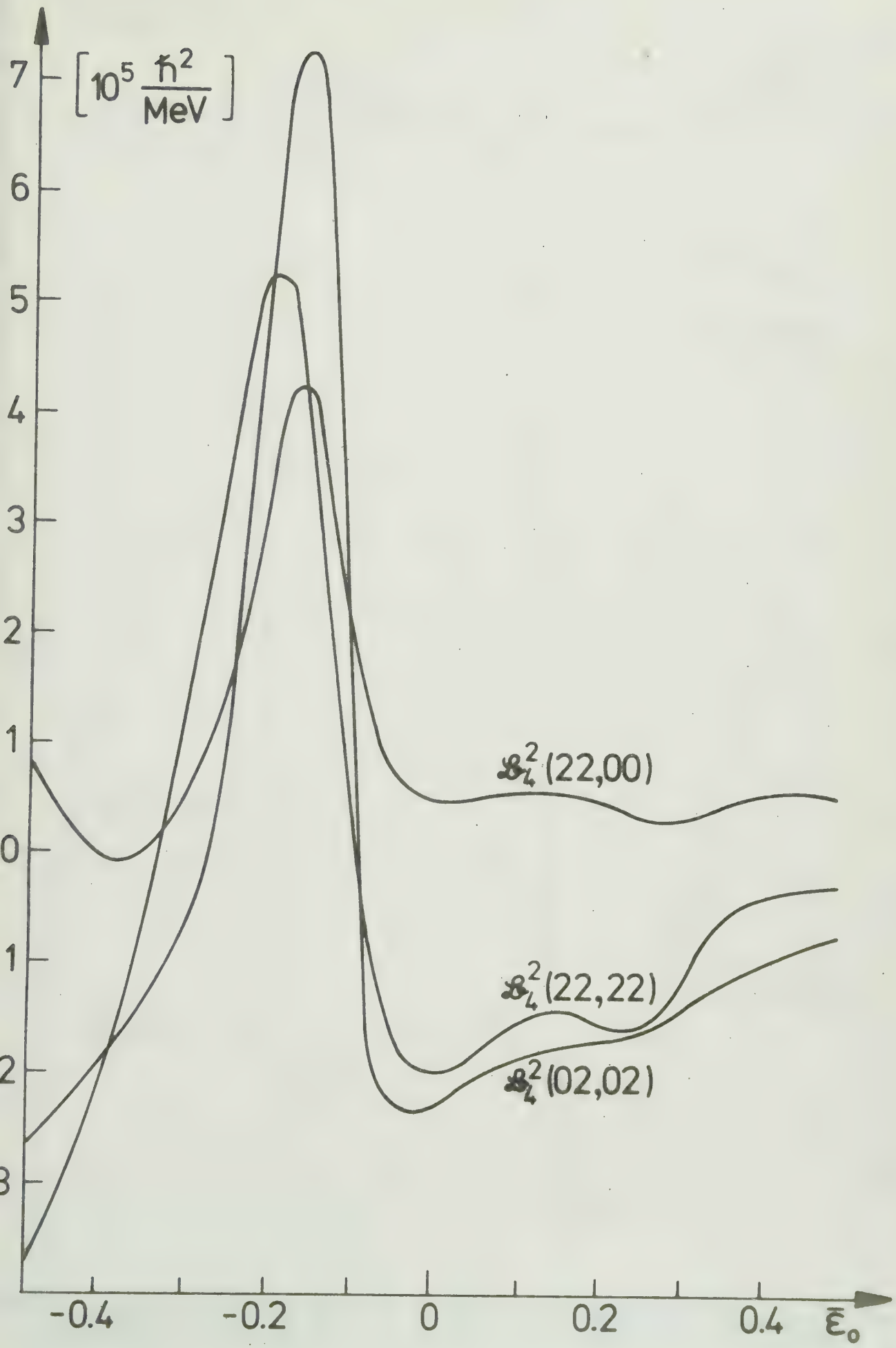

$\left[10^5 \frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
$\mathcal{B}_4^2(22,00)$
$\mathcal{B}_4^2(22,22)$
$\mathcal{B}_4^2(02,02)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 7d

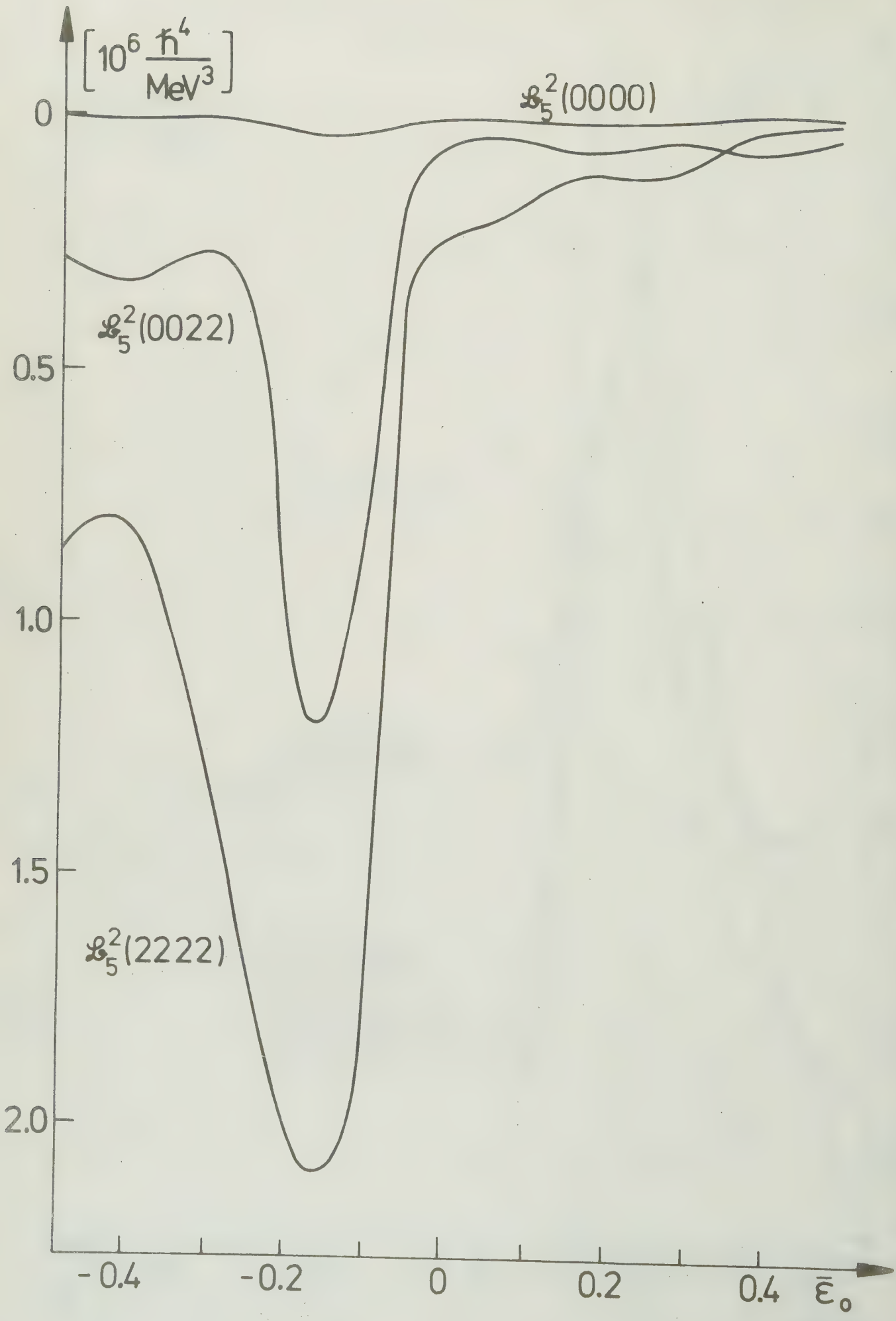

$\left[10^6 \frac{\hbar^4}{MeV^3}\right]$
0
0.5
1.0
1.5
2.0
$\mathscr{E}_5^2(0000)$
$\mathscr{E}_5^2(0022)$
$\mathscr{E}_5^2(2222)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig.7e

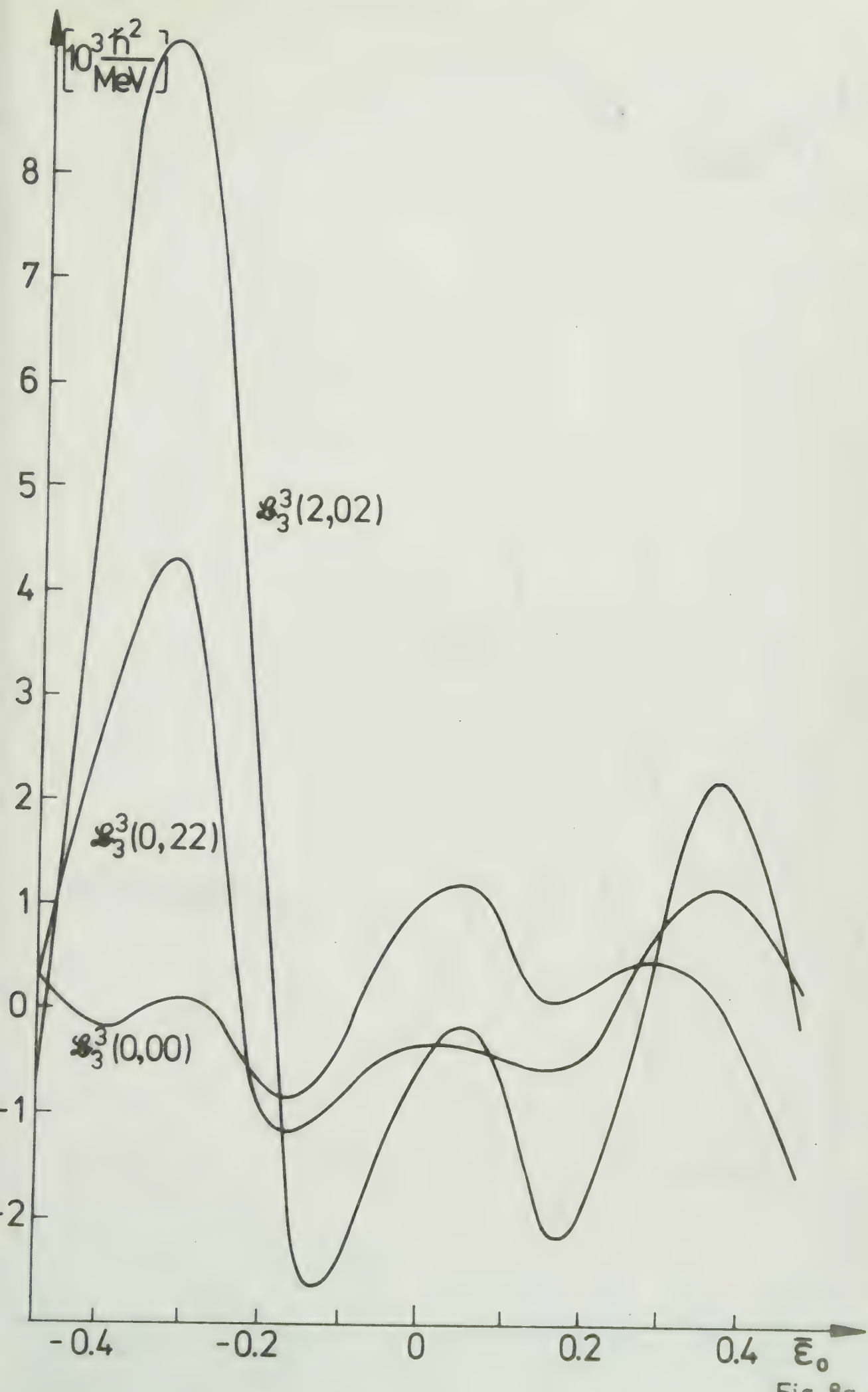

$10^3 \frac{\hbar^2}{MeV}$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
$\mathcal{E}_3^3(2,02)$
$\mathcal{E}_3^3(0,22)$
$\mathcal{E}_3^3(0,00)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 8a

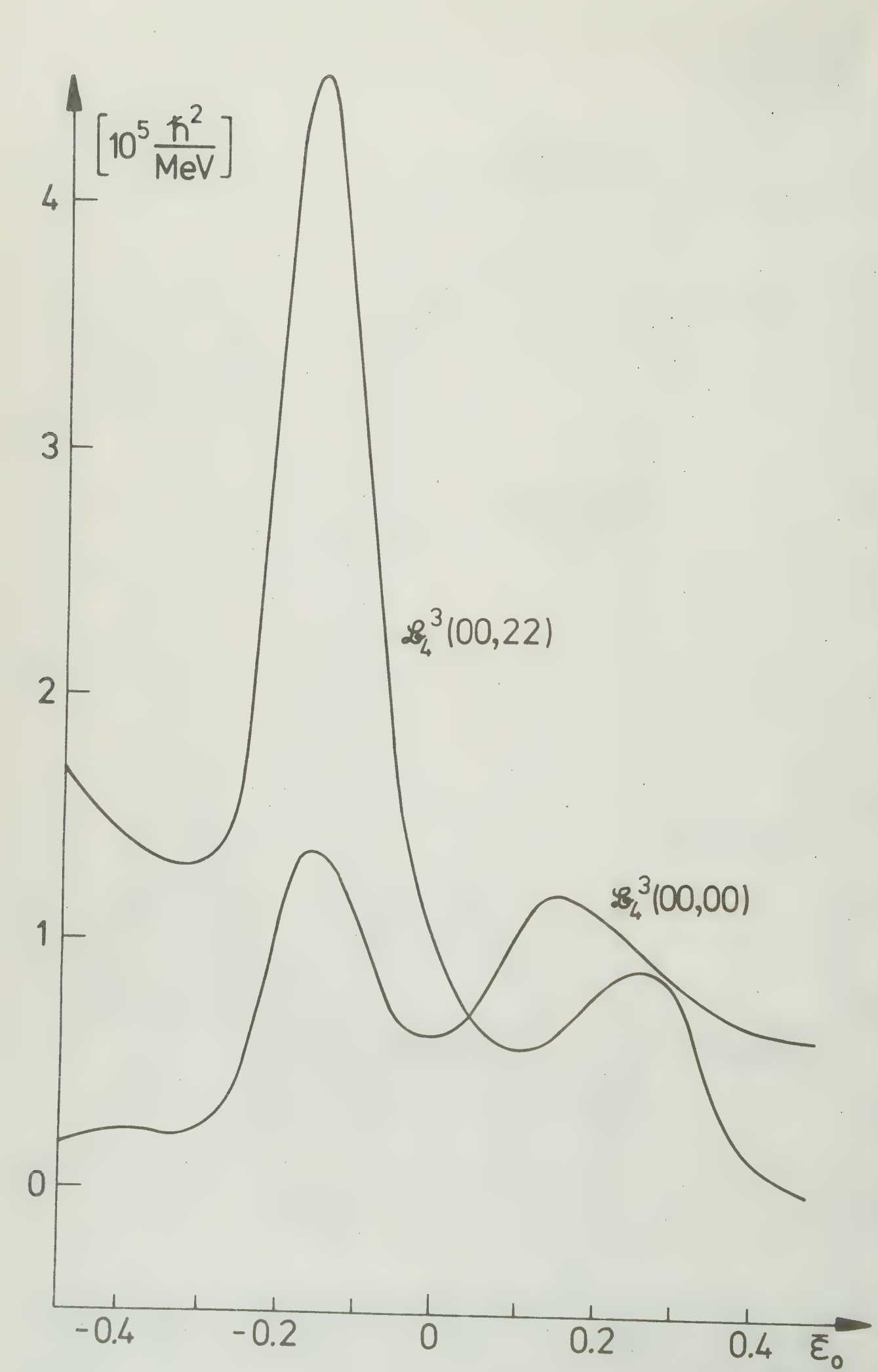

$[10^5 \frac{\hbar^2}{MeV}]$
4
3
2
1
0
$\mathcal{B}_4^3(00,22)$
$\mathcal{B}_4^3(00,00)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 8b

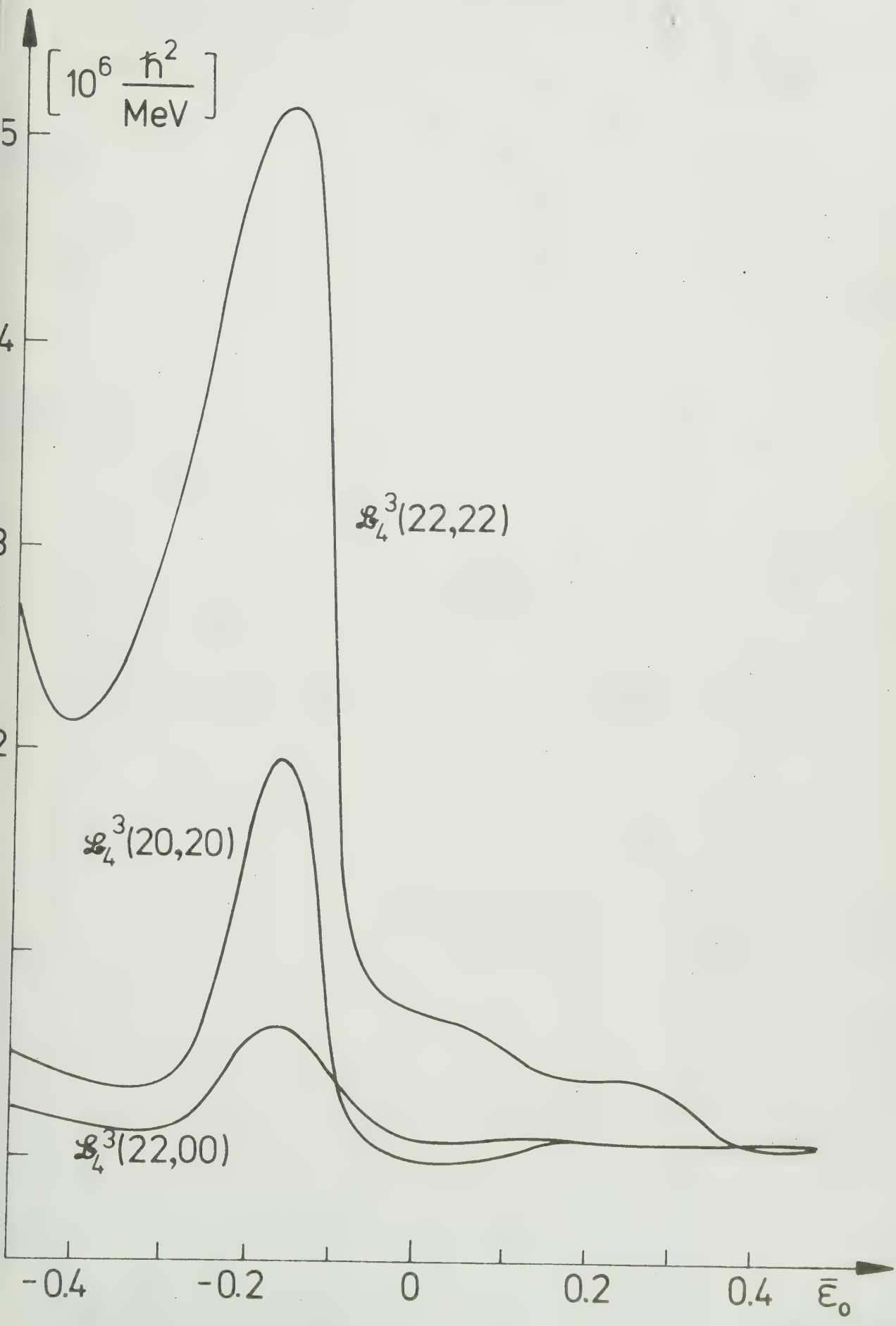

$\left[10^6 \frac{\hbar^2}{MeV}\right]$
5
4
3
2
$\mathscr{E}_4^3(22,22)$
$\mathscr{E}_4^3(20,20)$
$\mathscr{E}_4^3(22,00)$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 8c

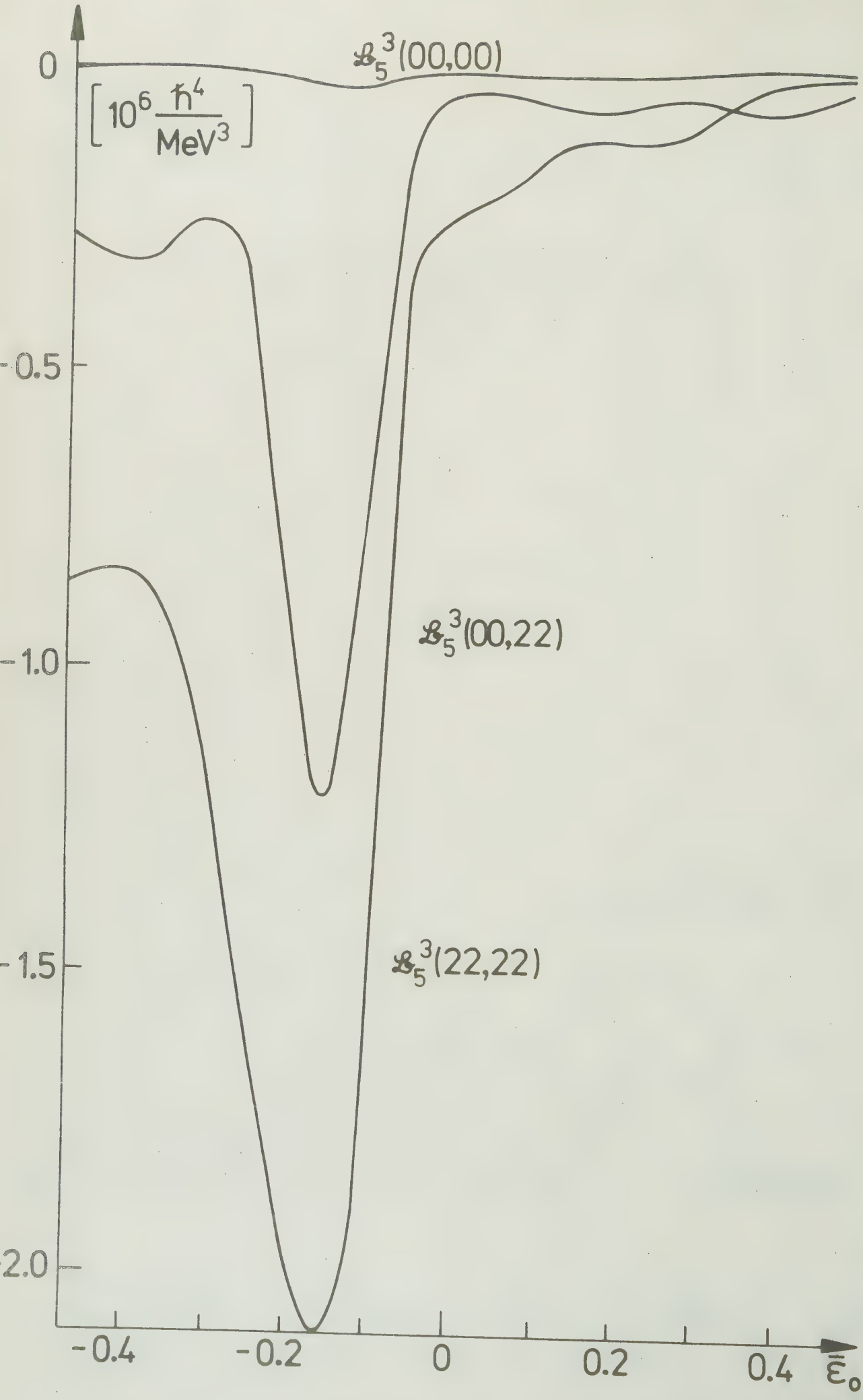

0
$\mathscr{B}_5^3(00,00)$
$\left[10^6 \frac{\hbar^4}{MeV^3}\right]$
-0.5
$\mathscr{B}_5^3(00,22)$
-1.0
-1.5
$\mathscr{B}_5^3(22,22)$
-2.0
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
$\bar{\varepsilon}_0$

Fig. 8d

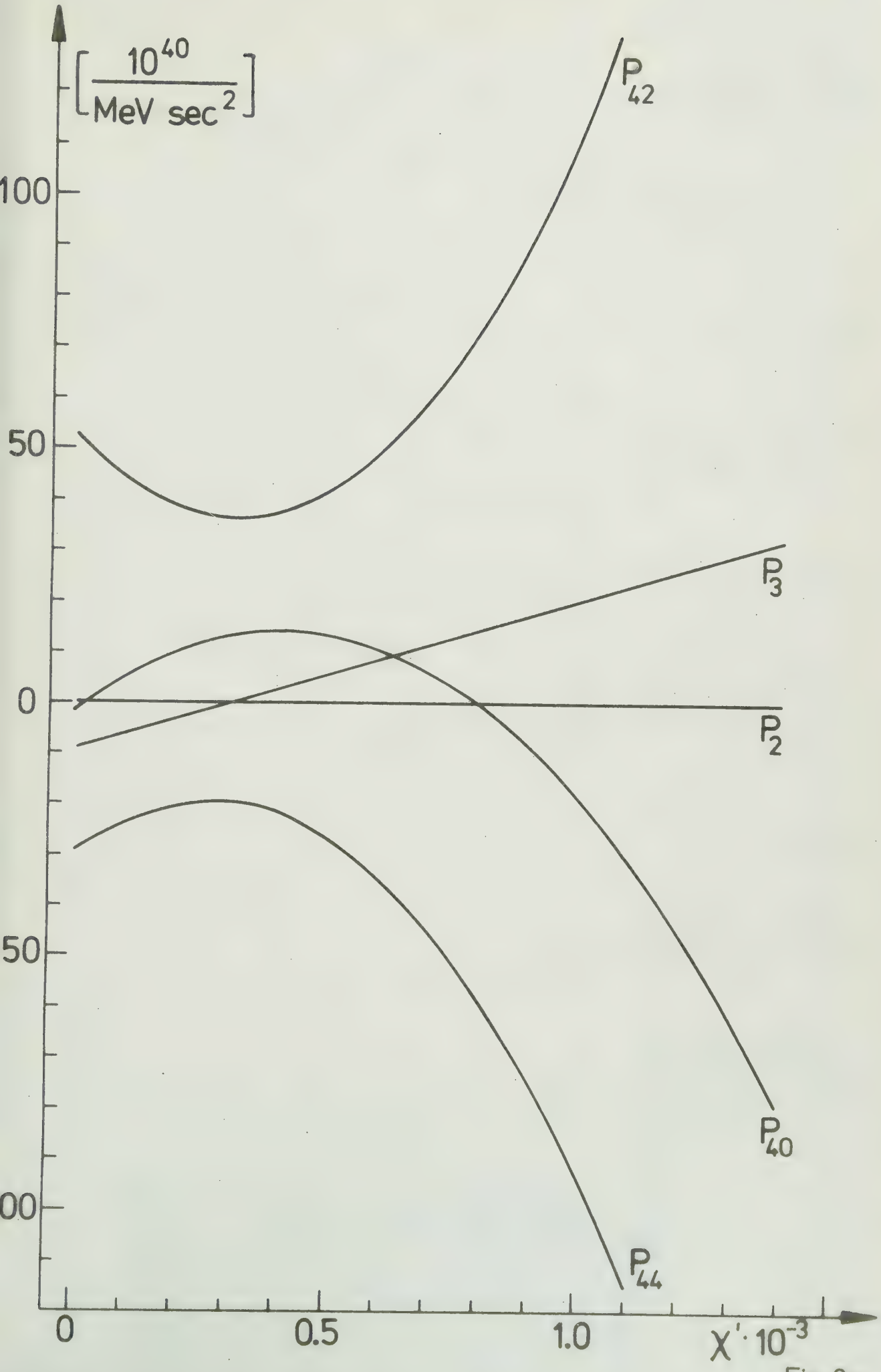
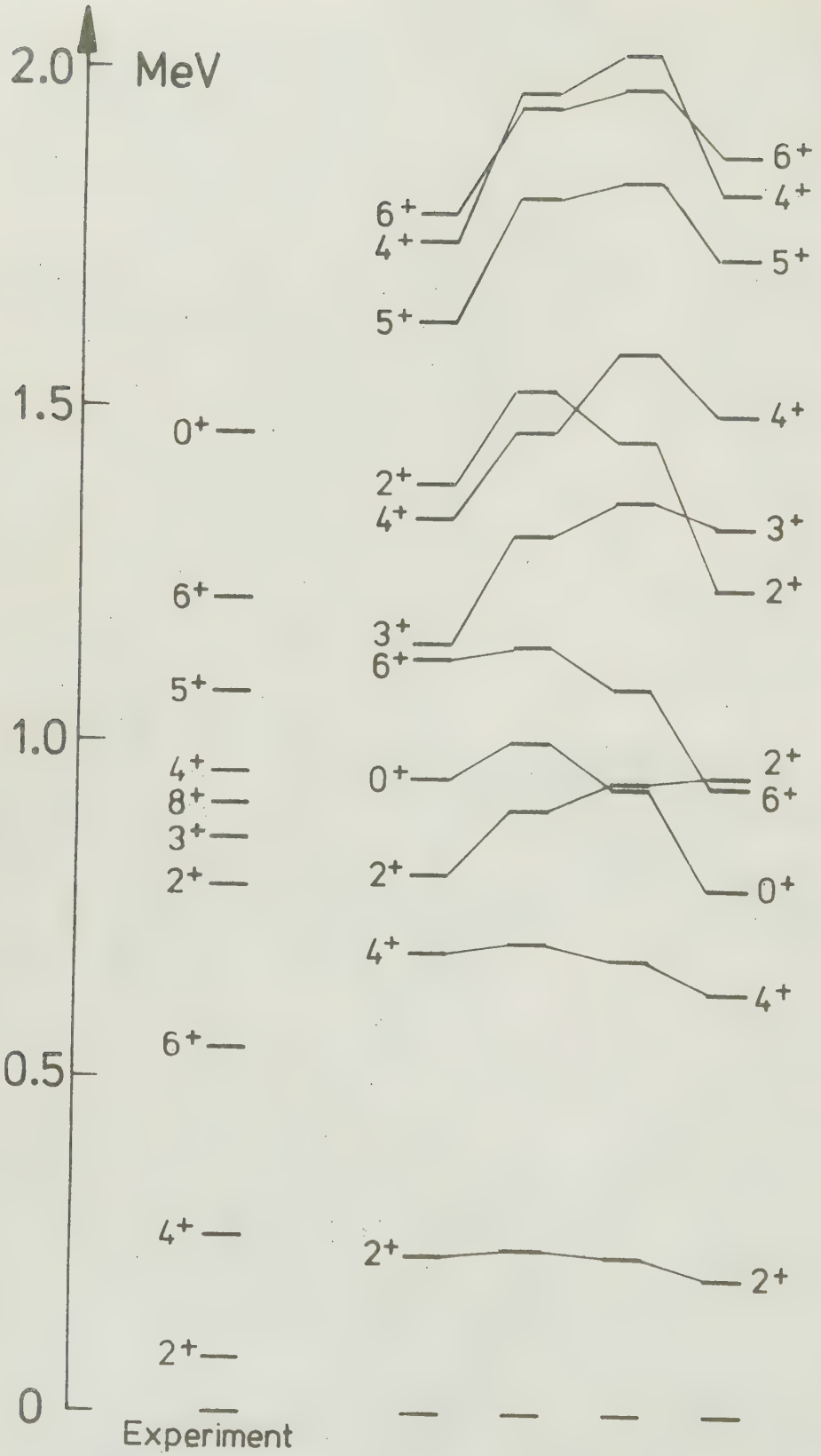
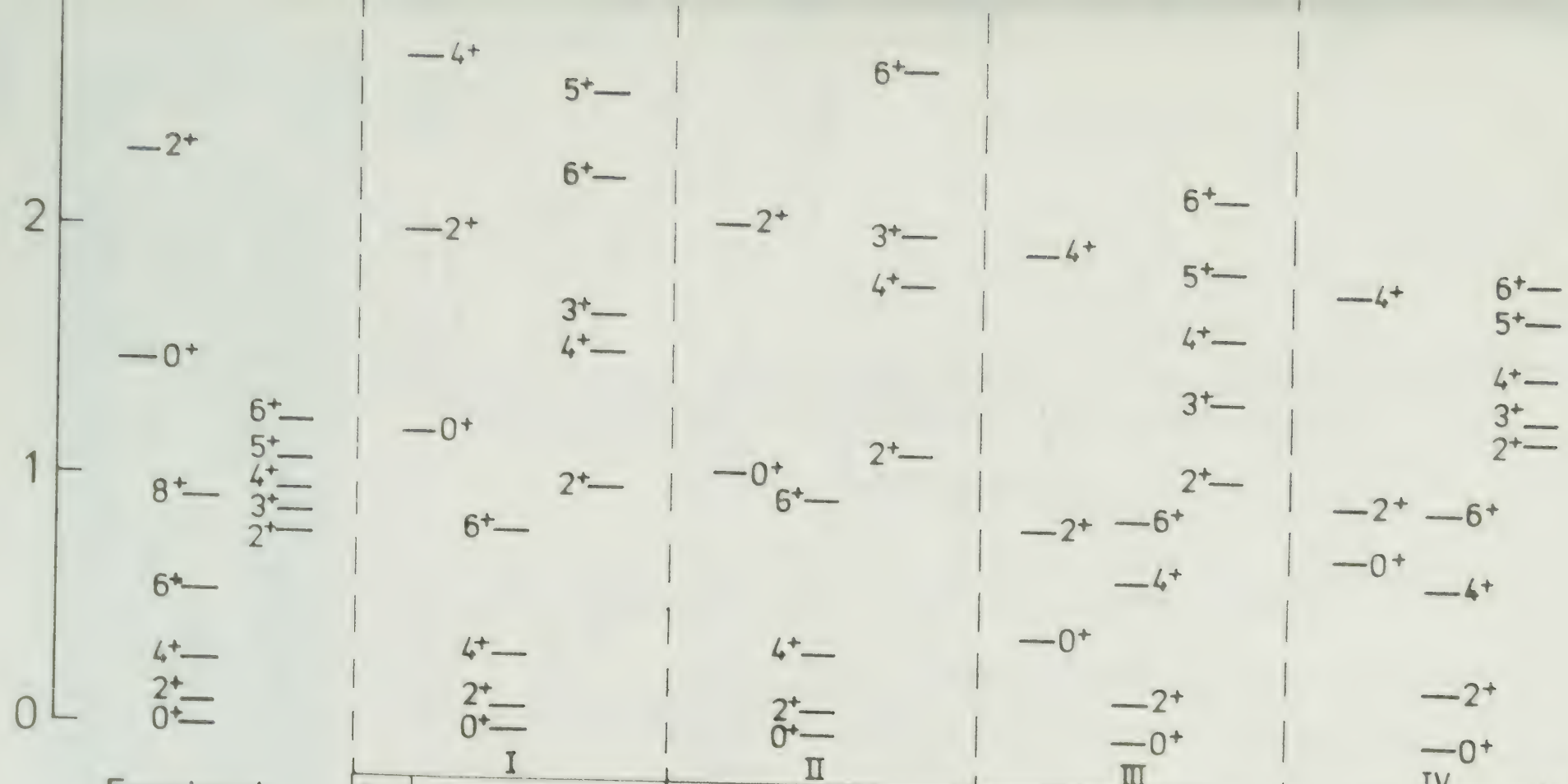

$\left[\frac{10^{40}}{\text{MeV sec}^2}\right]$
100
50
0
50
00
P_{42}
P_3
P_2
P_{40}
P_{44}
0
0.5
1.0
$\chi' \cdot 10^{-3}$

Fig. 9a



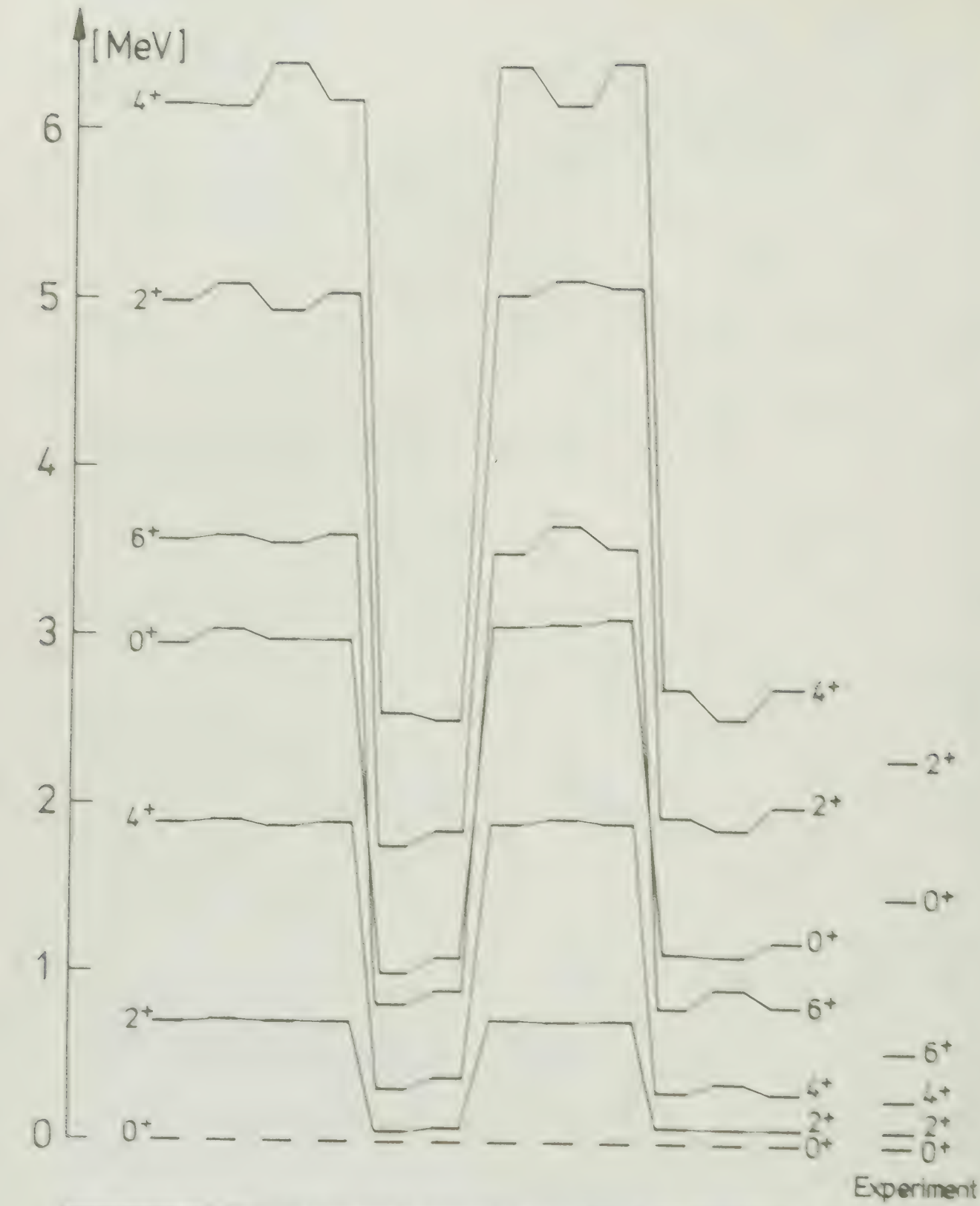
X	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	C_2	-201.99
B_2	58.30	58.30	58.30	58.30	C_3	134.22
P_3	-3.08	-0.115	2.85	5.82	C_4	3220.25
P_{40}	10.15	13.15	14.24	13.41	C_5	233.38
P_{42}	38.04	35.94	37.28	42.03	C_6	-10734.00
P_{44}	-20.18	-19.61	-21.80	-26.74	D_6	-1264.87

Fig. 9b



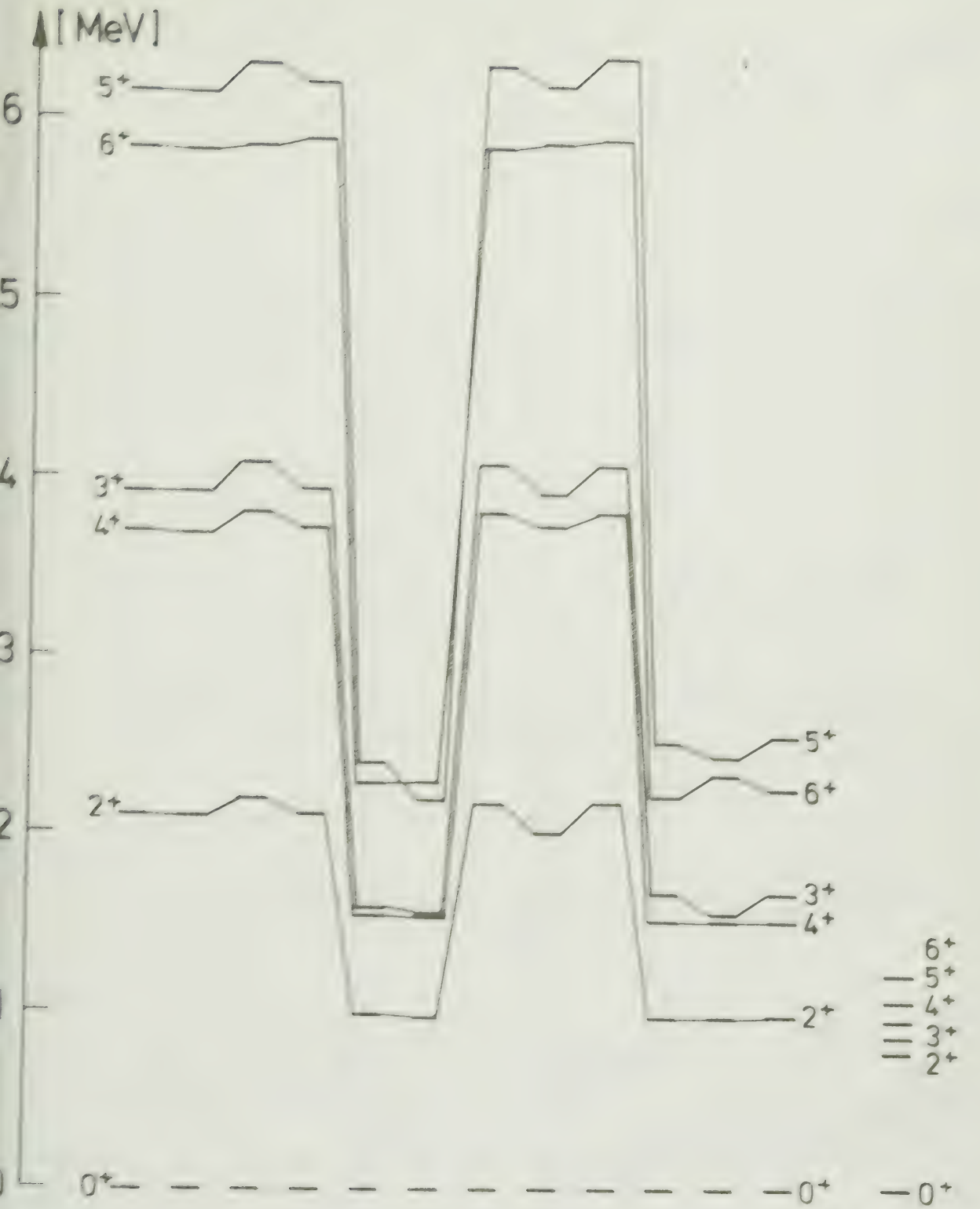
	I	II	III	IV		
B_2	56.81	56.81	58.30	58.30	C_2	-202
P_3	- 3.04	6.03	14.09	5.82	C_3	134
P_{40}	-131.57	-127.15	- 9.21	13.41	C_4	3220
P_{42}	- 34.94	- 30.71	74.61	42.03	C_5	233
P_{44}	5.69	- 1.86	- 50.27	-26.74	C_6	-10734
P_5	0.66	0.75	0.16		D_6	1265

Fig.10



B_2	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	C_2	-202
P_3		-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	C_3	134
P_{40}					-131.6	-131.6				-131.6	-131.6	-131.6	C_4	3220
P_{42}			-34.94				-34.94		-34.94	-34.94		-34.94	C_5	233
P_{44}				5.69				5.69	5.69		5.69	5.69	C_6	-10734
P_5	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	D_4	1265

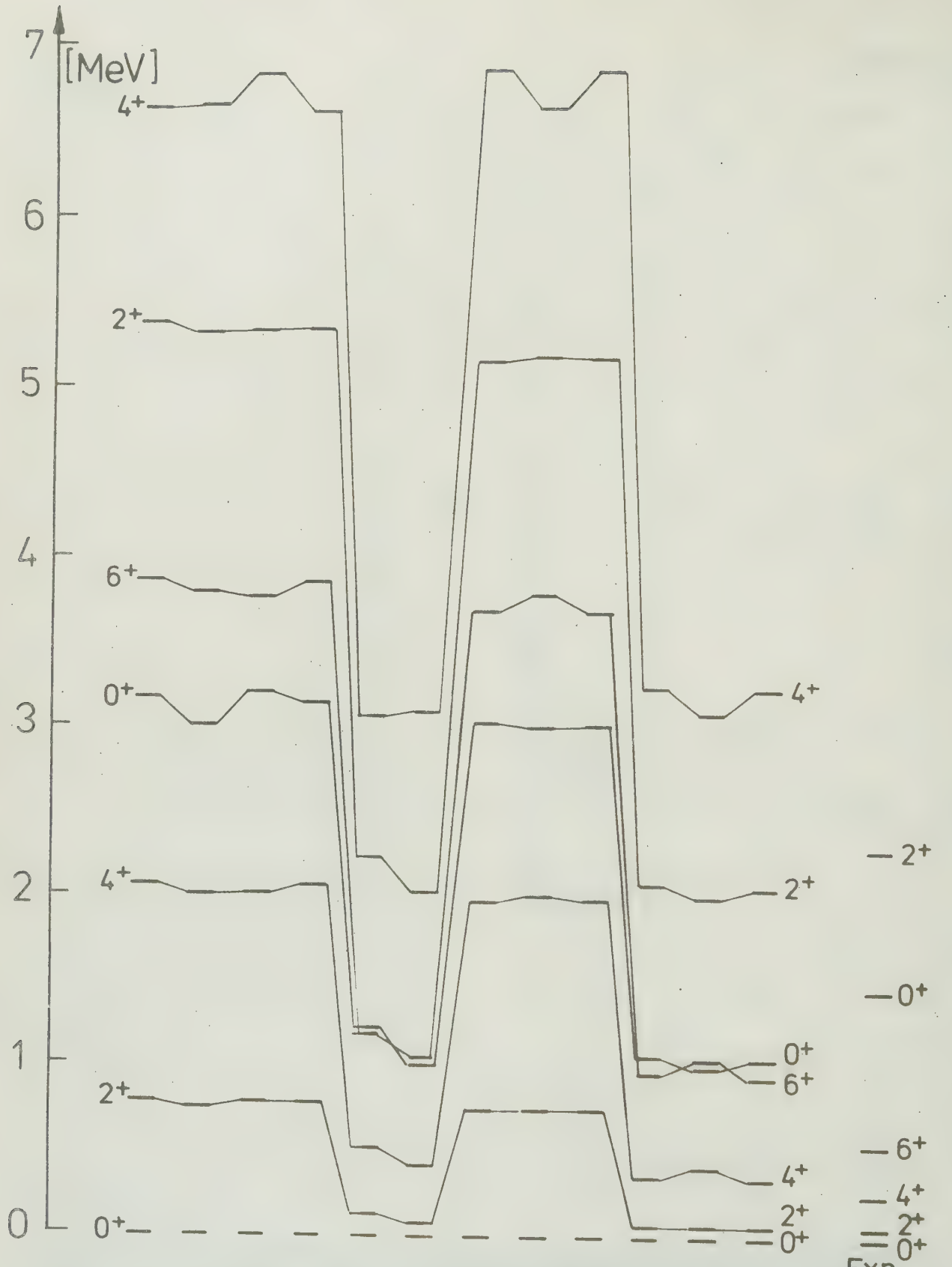
Fig. 11a



Experiment

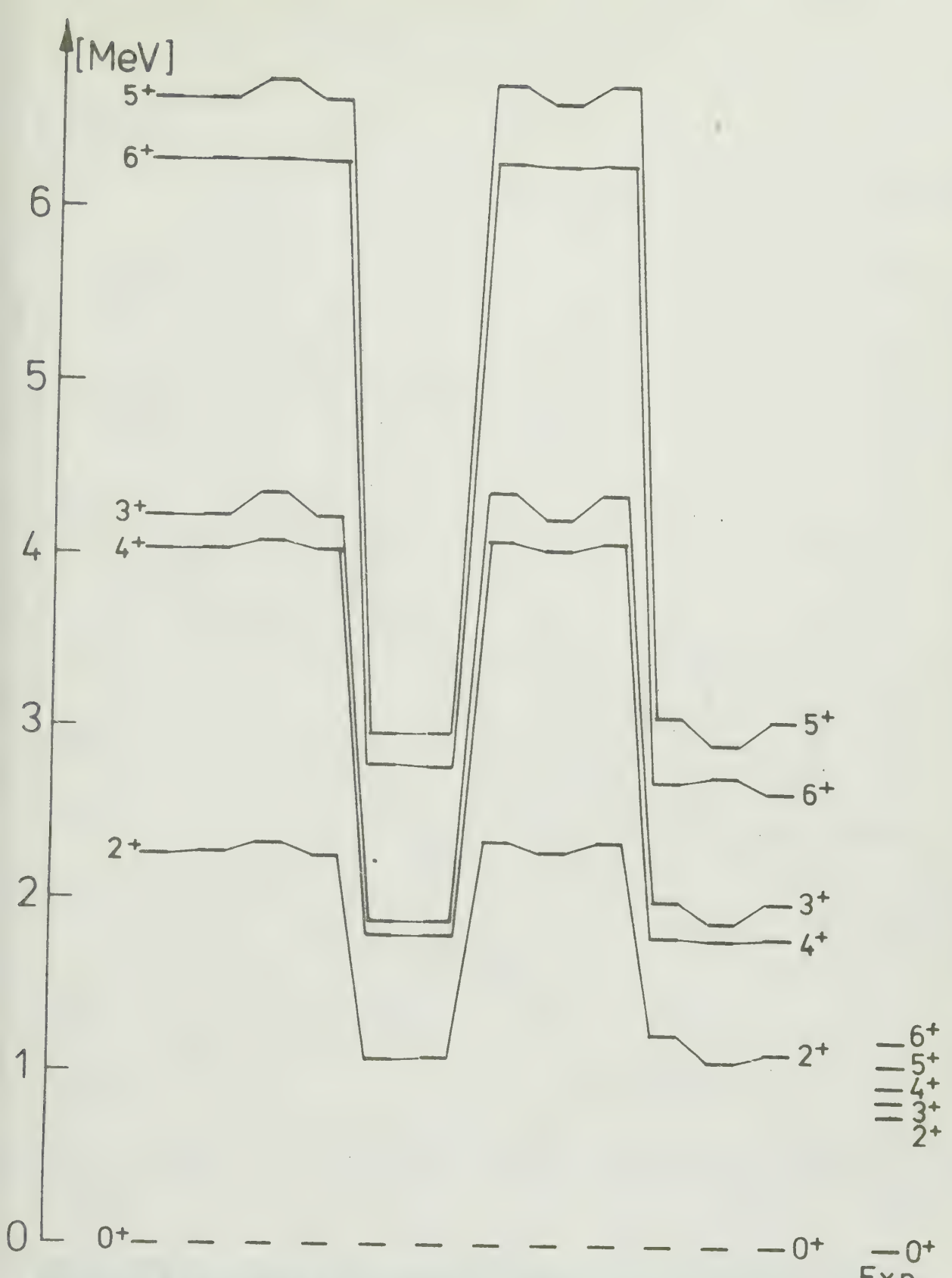
B_2	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	C_2	-202
P_3		-3.04				-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	-3.04	C_3	134
P_{40}					-131.6	-131.6				-131.6	-131.6	-131.6	C_4	3220
P_{42}			-34.94				-34.94		-34.94	-34.94		-34.94	C_5	233
P_{44}				5.69				5.69	5.69		5.69	5.69	C_6	-10 734
P_5	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	0.66	D_6	1265

Fig.11b



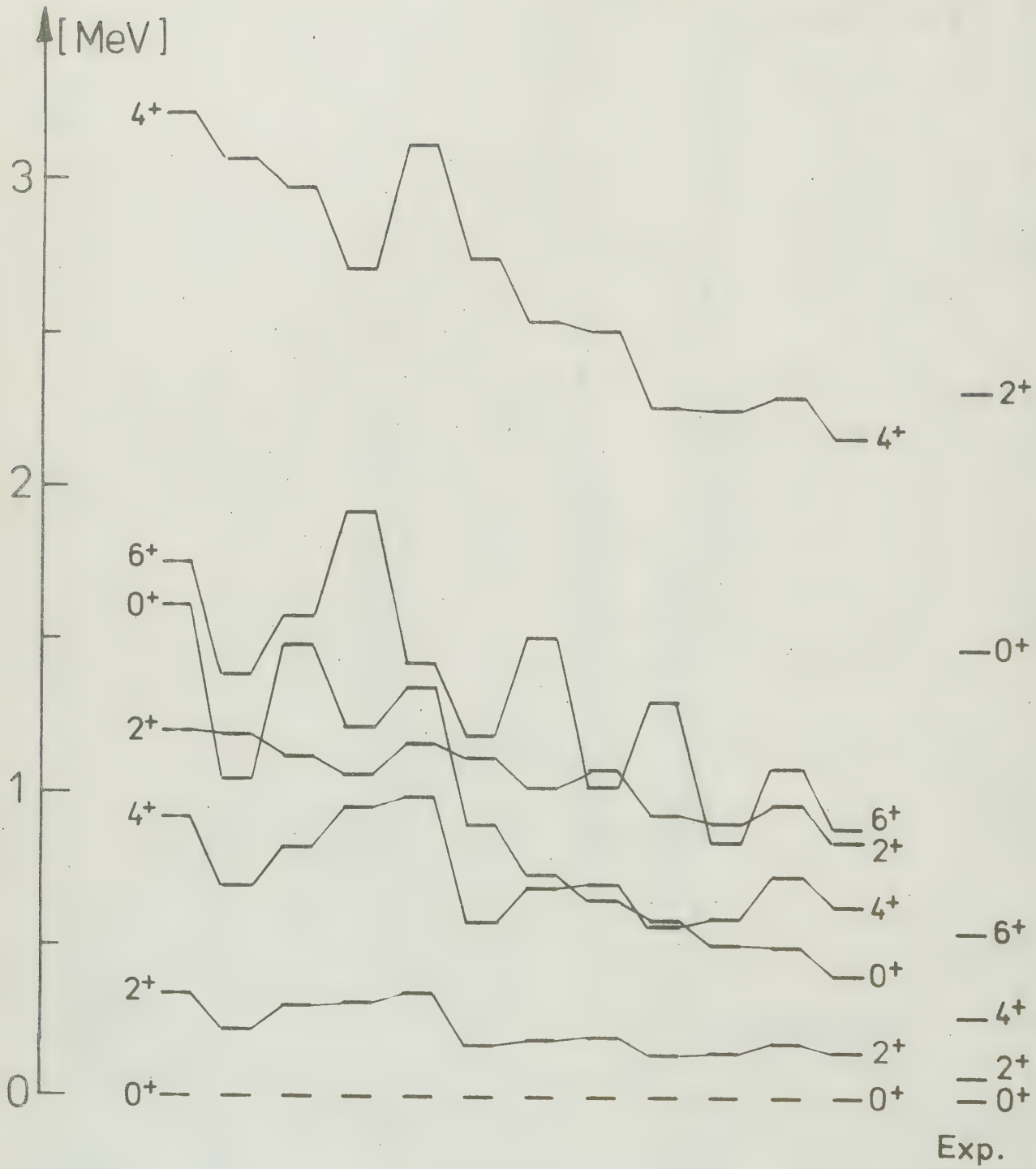
B_2	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	C_2	-201.99
P_3		6.03				6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	C_3	134.22
P_{40}					-127	-127				-127	-127	-127	C_4	3220.3
P_{42}			-30.7				-30.7		-30.7	-30.7		-30.7	C_6	233.38
P_{44}				-1.86				-1.86	-1.86		-1.86	-1.86	C_6	-10734
P_5	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	D_6	1264.9

Fig. 12a



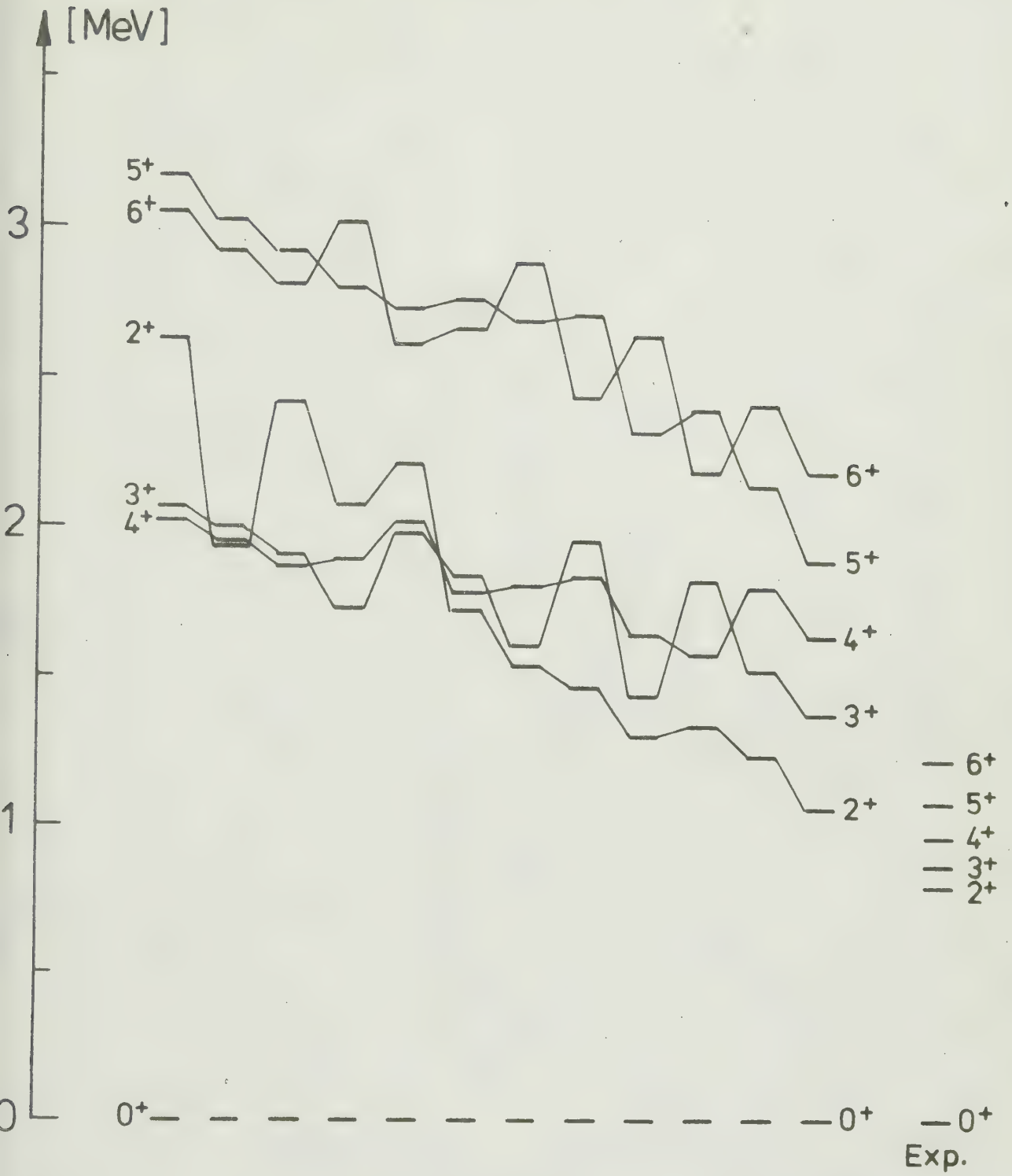
B_2	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	56.81	C_2	-201.99
P_3		6.03				6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	6.03	C_3	134.22
P_{40}					-127	-127				-127	-127	-127	C_4	3220.2
P_{42}			-30.7				-30.7		-30.7	-30.7		-30.7	C_5	233.38
P_{44}				-1.86				-1.86	-1.86		-1.86	-1.86	C_6	-10 734
P_5	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	D_6	1264.9

Fig. 12 b



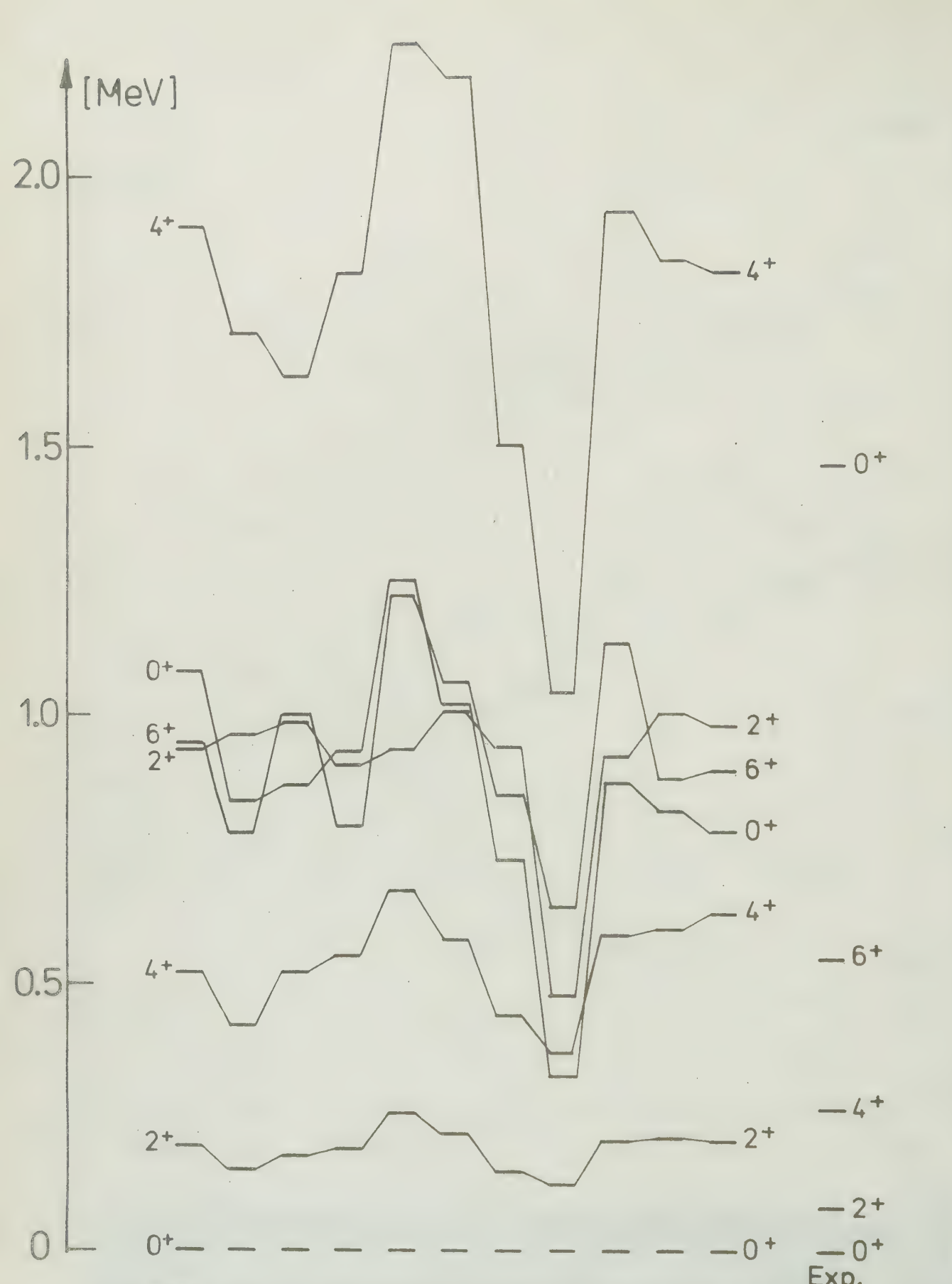
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3		14.1				14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	C_3	134.2
P_{40}			-9.21			-9.21			-9.21	-9.21		-9.21	C_4	3220.2
P_{42}				74.6			74.6		74.6		74.6	74.6	C_5	233.4
P_{44}					-50.3			-50.3		-50.3	-50.3	-50.3	C_6	-10734
P_5	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	D_6	1264.9

Fig. 13a



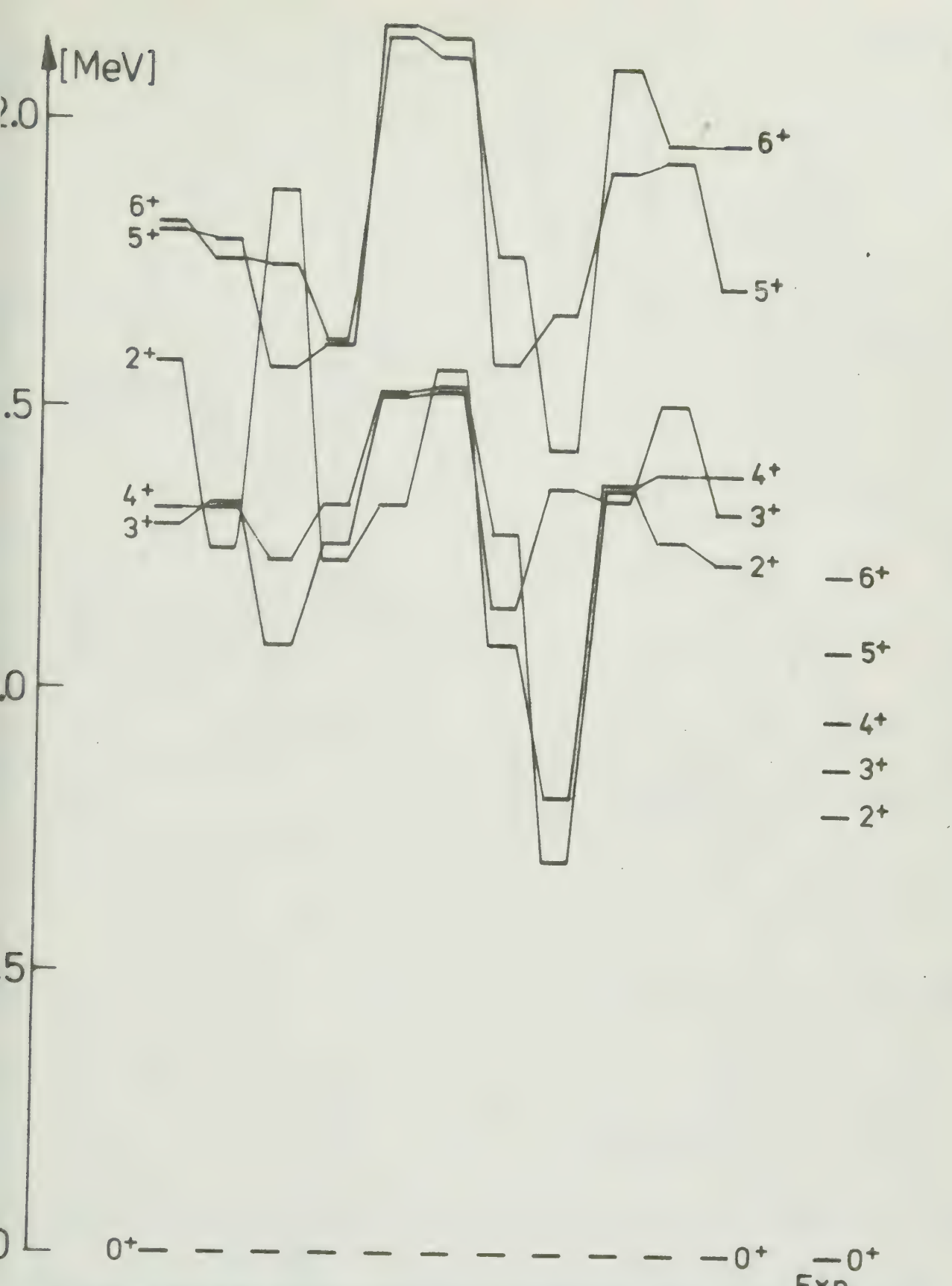
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3		14.1				14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	C_3	134.2
P_{40}		-9.21	-9.21			-9.21			-9.21	-9.21		-9.21	C_4	3220.2
P_{42}				74.6			74.6		74.6		74.6	74.6	C_5	233.4
P_{44}					-50.3			-50.3		-50.3	-50.3	-50.3	C_6	-10734
P_5	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	D_6	1264.9

Fig. 13b



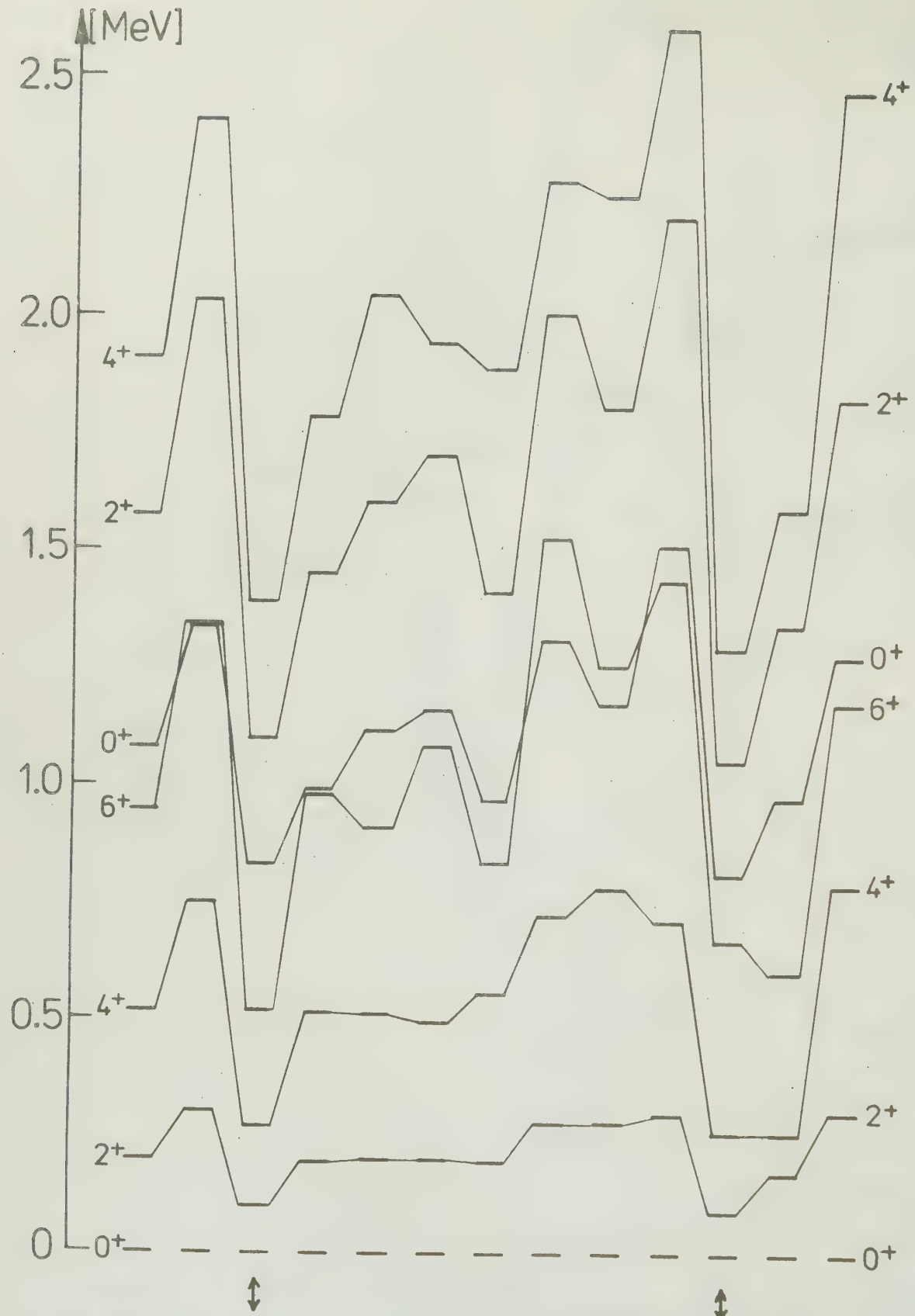
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3		5.82				5.82	5.82	5.82	5.82	5.82	5.82	C_3	134.2
P_{40}					13.4	13.4			13.4	13.4	13.4	C_4	3220.2
P_{42}			42.0				42.0		42.0		42.0	C_5	233.4
P_{44}				-26.7				-26.7		-26.7	-26.7	C_6	-10734
P_5												D_6	1264.9

Fig. 14a



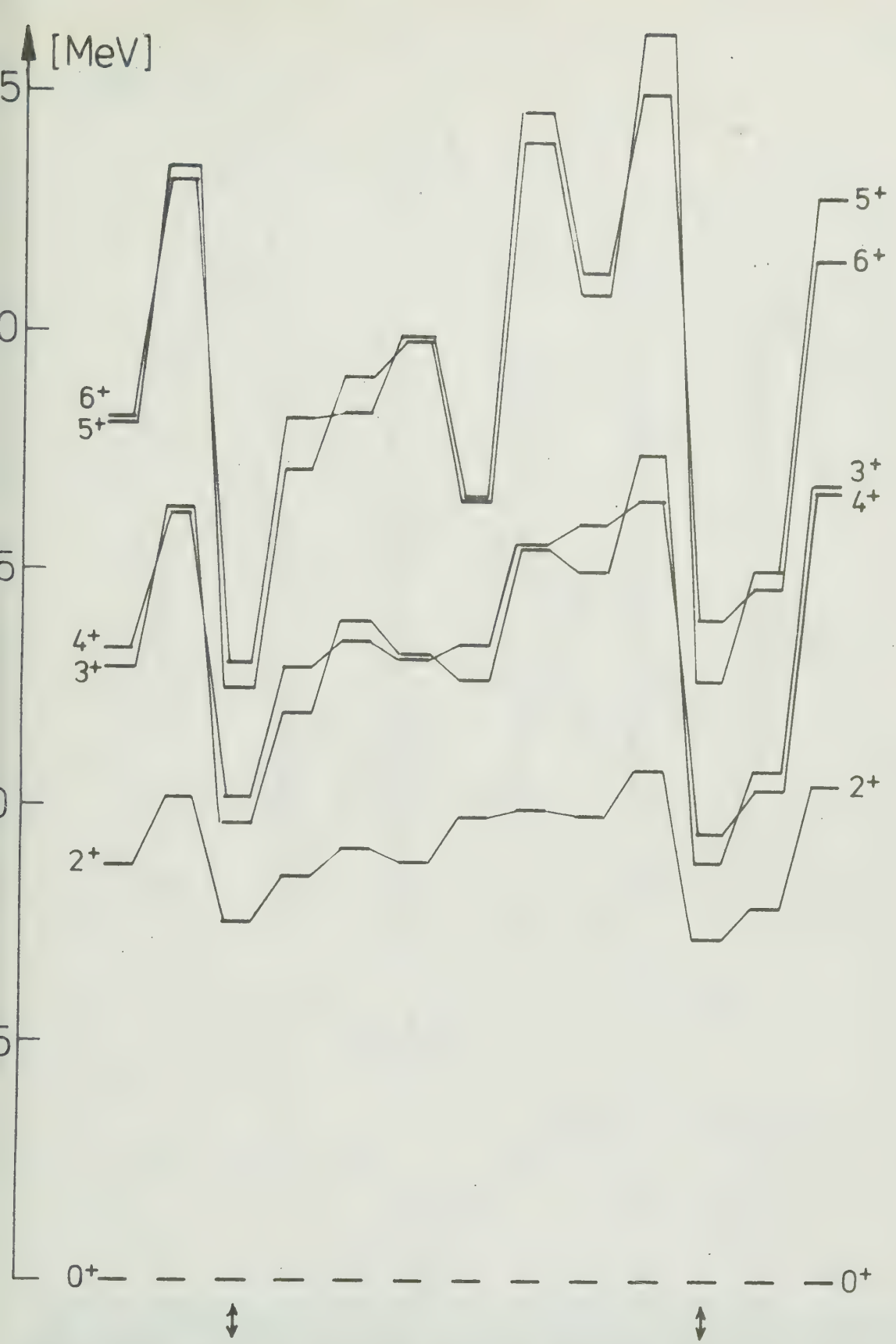
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3		5.82				5.82	5.82	5.82	5.82	5.82	5.82	C_3	134.2
P_{40}					13.4	13.4			13.4	13.4	13.4	C_4	3220.2
P_{42}			42.0				42.0		42.0		42.0	C_5	233.4
P_{44}				-26.7				-26.7		-26.7	-26.7	C_6	-10 734
P_5												D_6	1264.9

Fig. 14 b



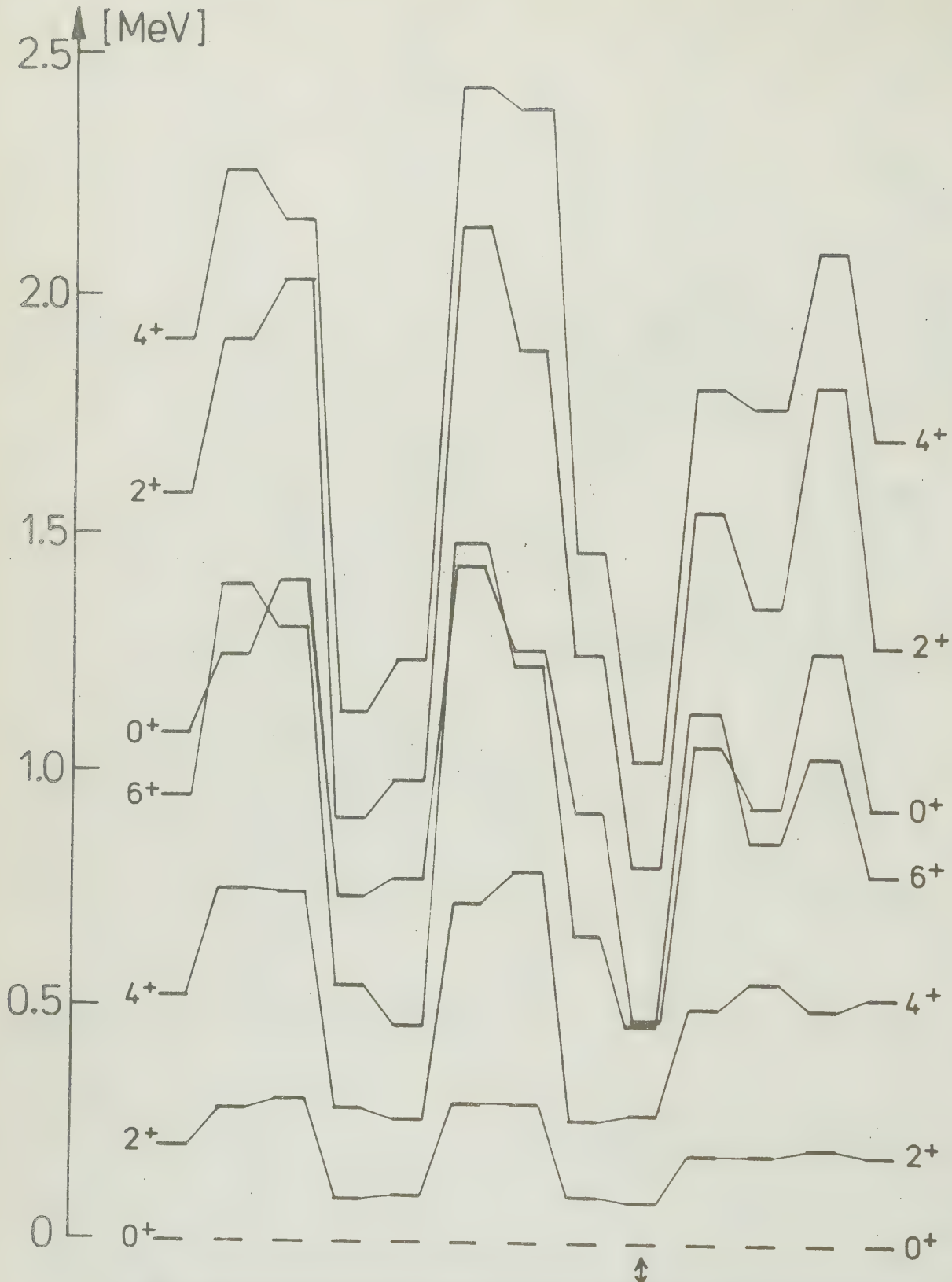
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3														C_3	134.2
P_{40}		+20	-20					+20	+20	+20	-20	-20	+20	C_4	3220.2
P_{42}				+20	-20			+20	+20	-20	+20	-20	+20	C_5	233.4
P_{44}						+20	-20	+20	-20	+20	+20	+20	-20	C_6	-10 734
P_5														D_6	1264.9

Fig. 15a



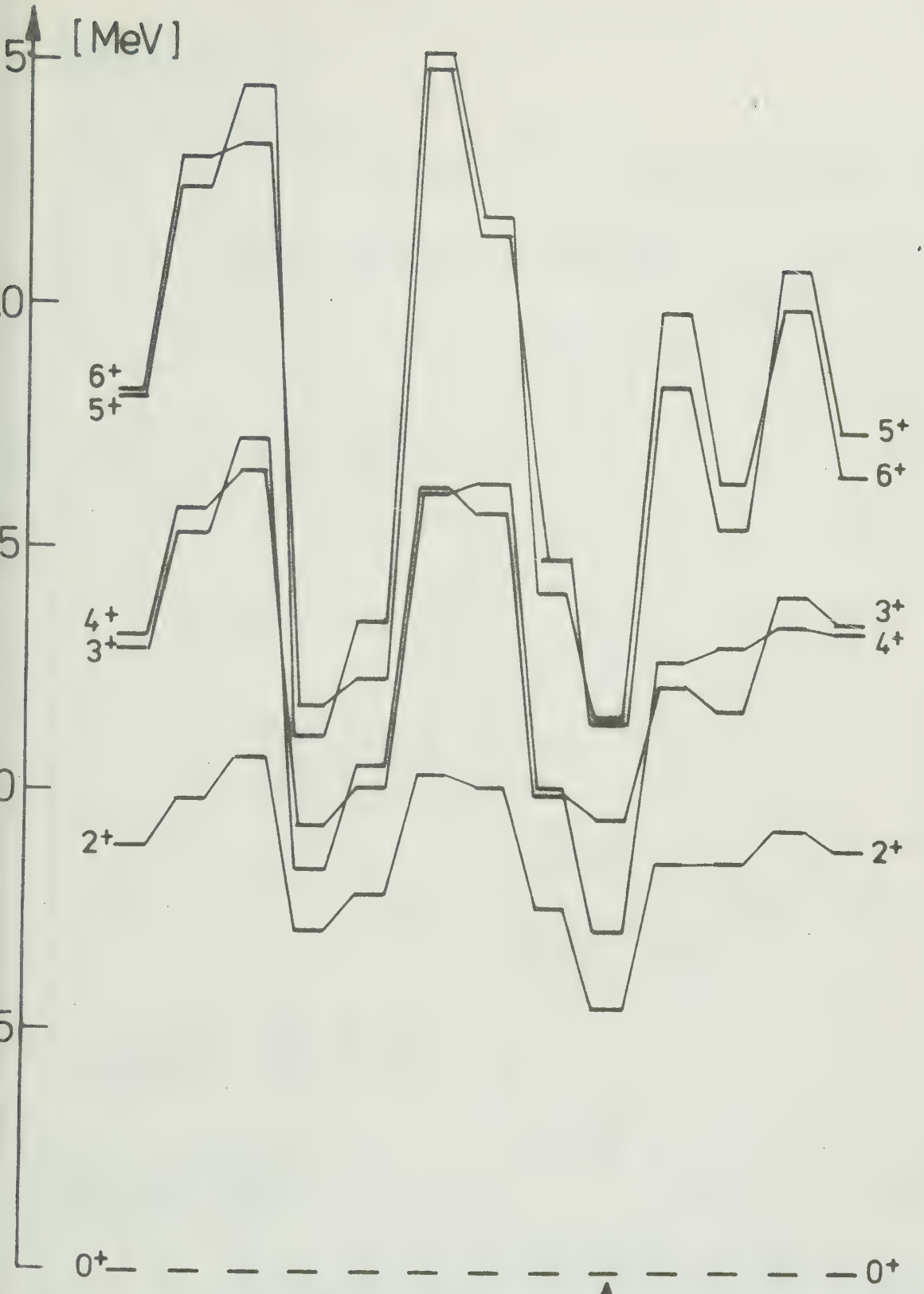
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3														C_3	134.2
P_{40}		+20	-20					+20	+20	+20	-20	-20	+20	C_4	3220.2
P_{42}				+20	-20			+20	+20	-20	+20	-20	+20	C_5	233.4
P_{44}						+20	-20	+20	-20	+20	+20	+20	-20	C_6	-10 734
P_5														D_6	1264.9

Fig. 15 b



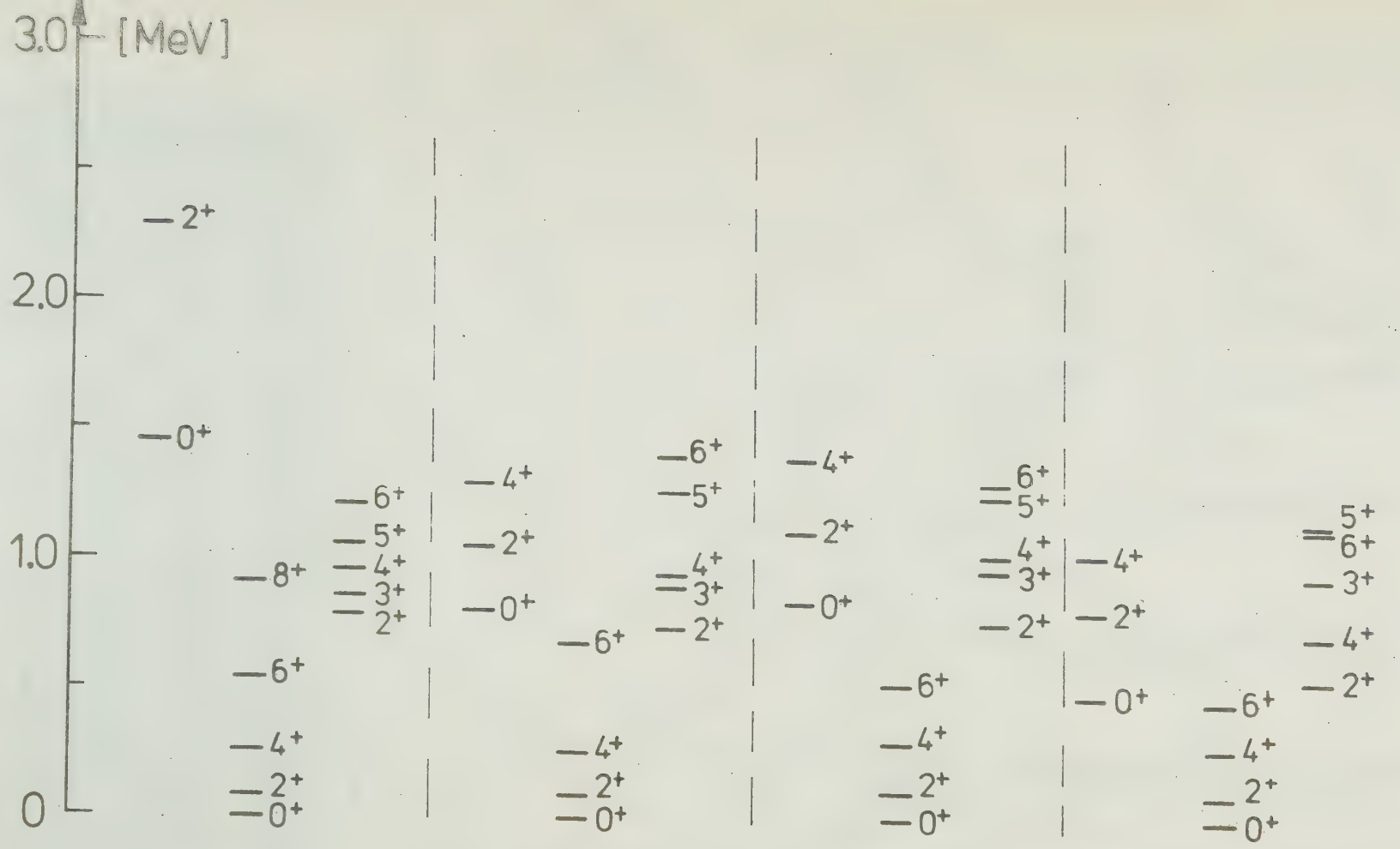
B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3														C_3	134.2
P_{40}		+20	+20	-20	-20	+20	+20	-20	-20					C_4	3220.2
P_{42}		+20	-20	+20	-20					+20	+20	-20	-20	C_5	233.4
P_{44}						+20	-20	+20	-20	+20	-20	+20	-20	C_6	-10 734
P_5														D_6	1264.9

Fig. 15c



B_2	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	58.3	C_2	-202
P_3														C_3	134.2
P_{40}		+20	+20	-20	-20	+20	+20	-20	-20					C_4	3220.2
P_{42}		+20	-20	+20	-20					+20	+20	-20	-20	C_6	233.4
P_{44}						+20	-20	+20	-20	+20	-20	+20	-20	C_8	-10 734
P_5														D_6	1264.6

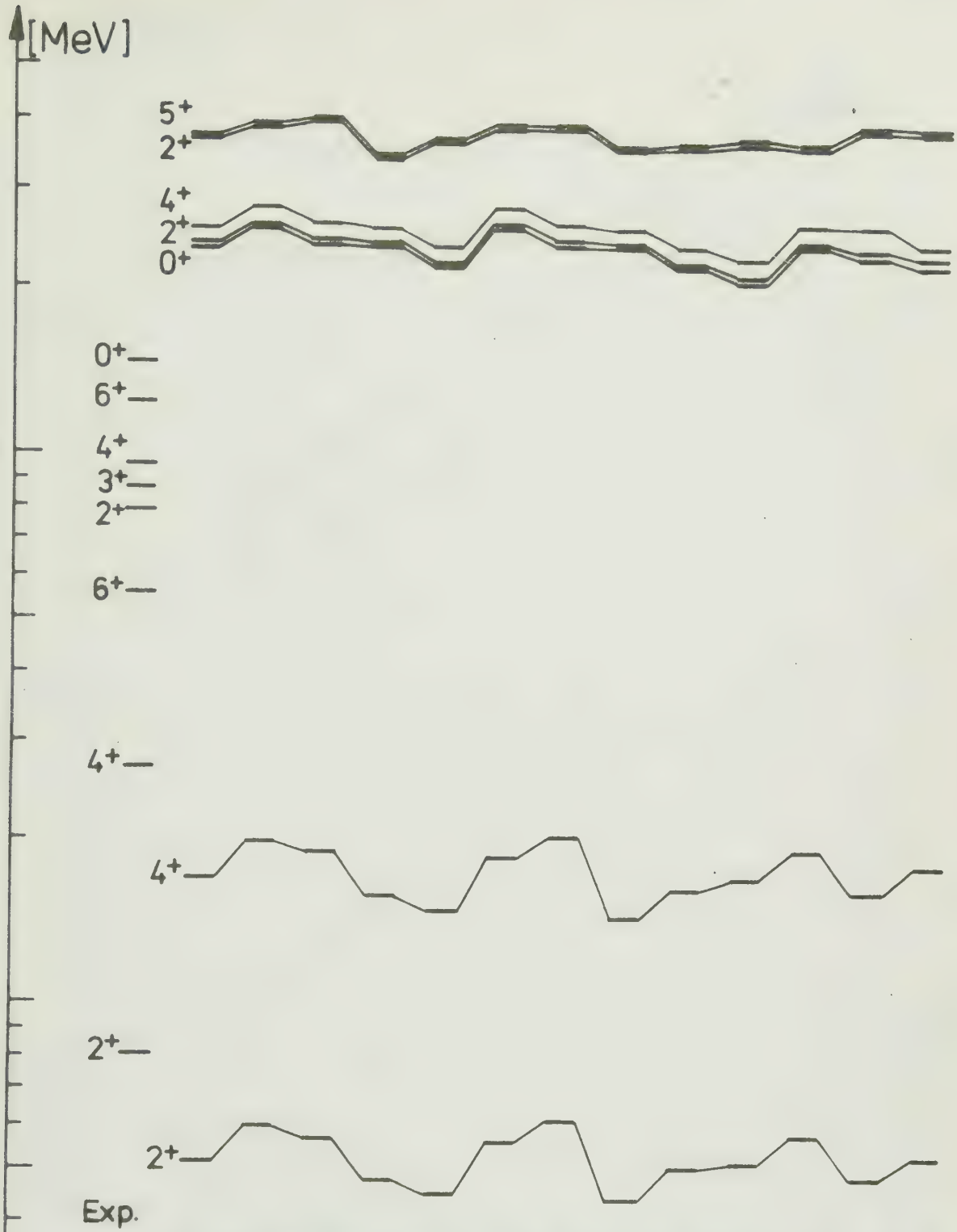
Fig. 15d



Experiment

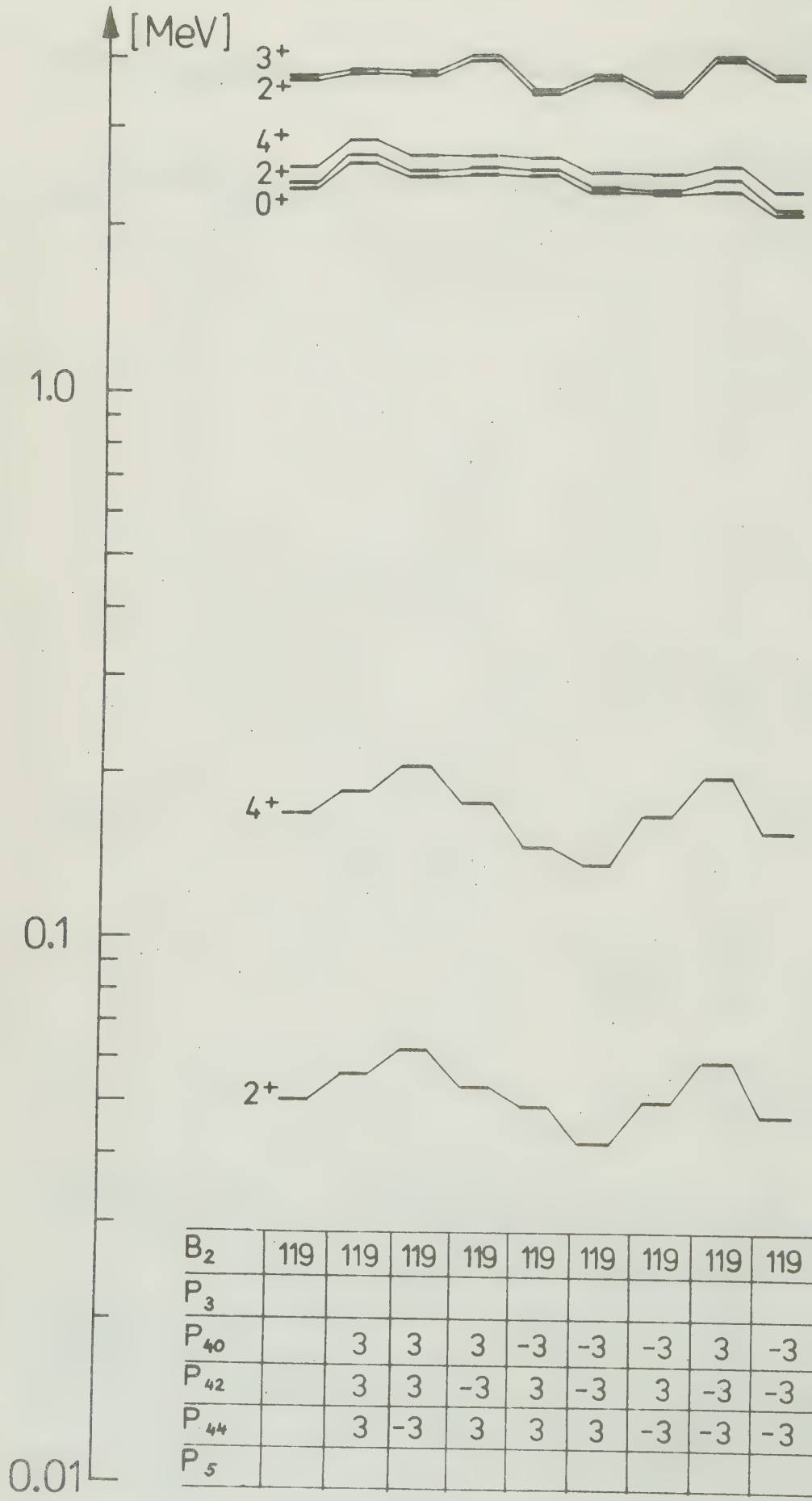
B_2	58.30	58.30	58.30	C_2	-201.99
P_3				C_3	134.22
P_{40}	-20.0	-20.0	-20.0	C_4	3220.25
P_{42}	+20.0			C_5	233.38
P_{44}	+20.0		-20.0	C_6	-10 734.00
P_5				D_6	1264.57

Fig. 15e



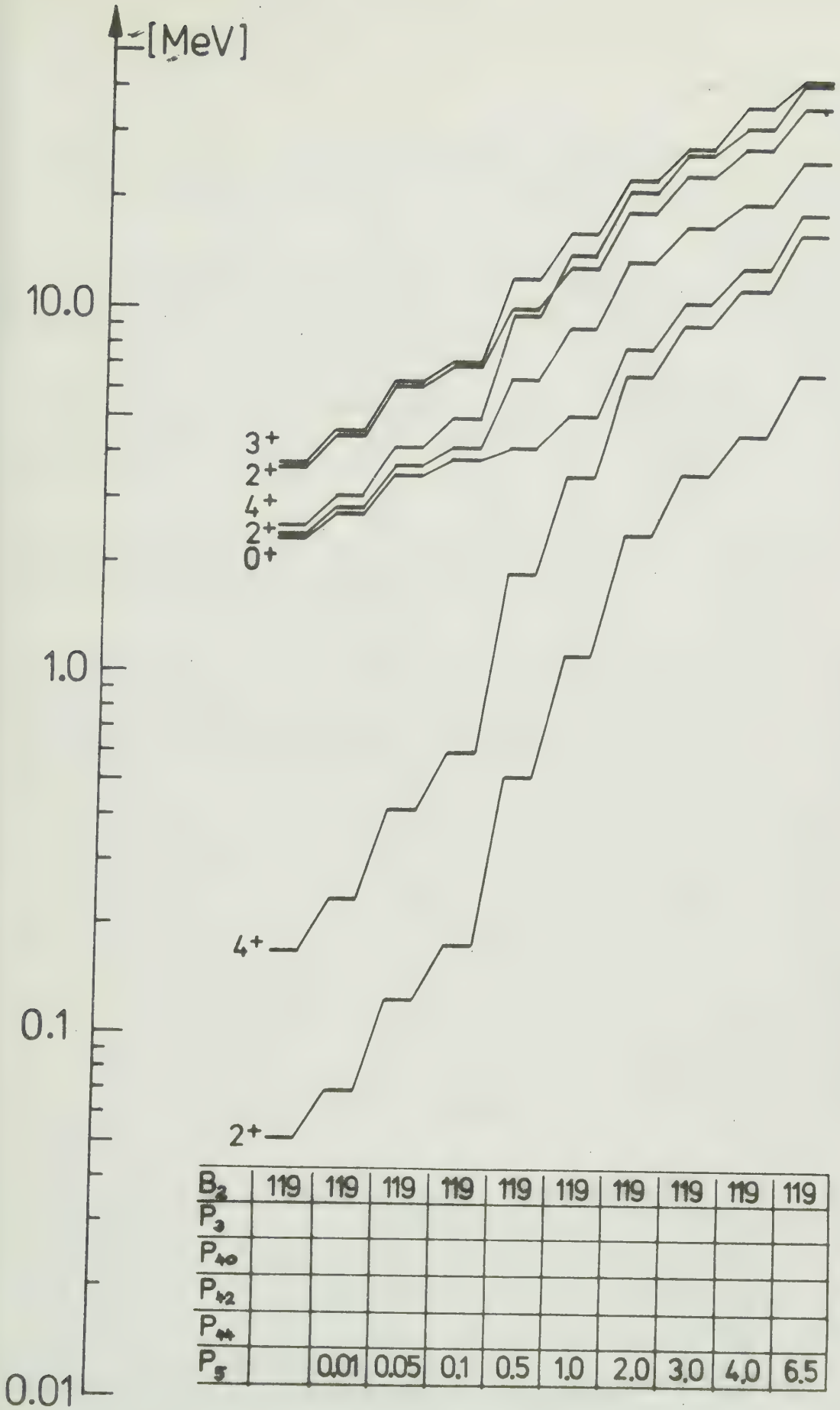
B_2	119	119	119	119	119	119	119	119	119	119	119	119	119
P_3													
P_{40}		3	3	-3	-3	3	3	-3	-3				
P_{42}		3	-3	3	-3					3	3	-3	-3
P_{44}						3	-3	3	-3	3	-3	3	-3
P_5													

Fig. 16a



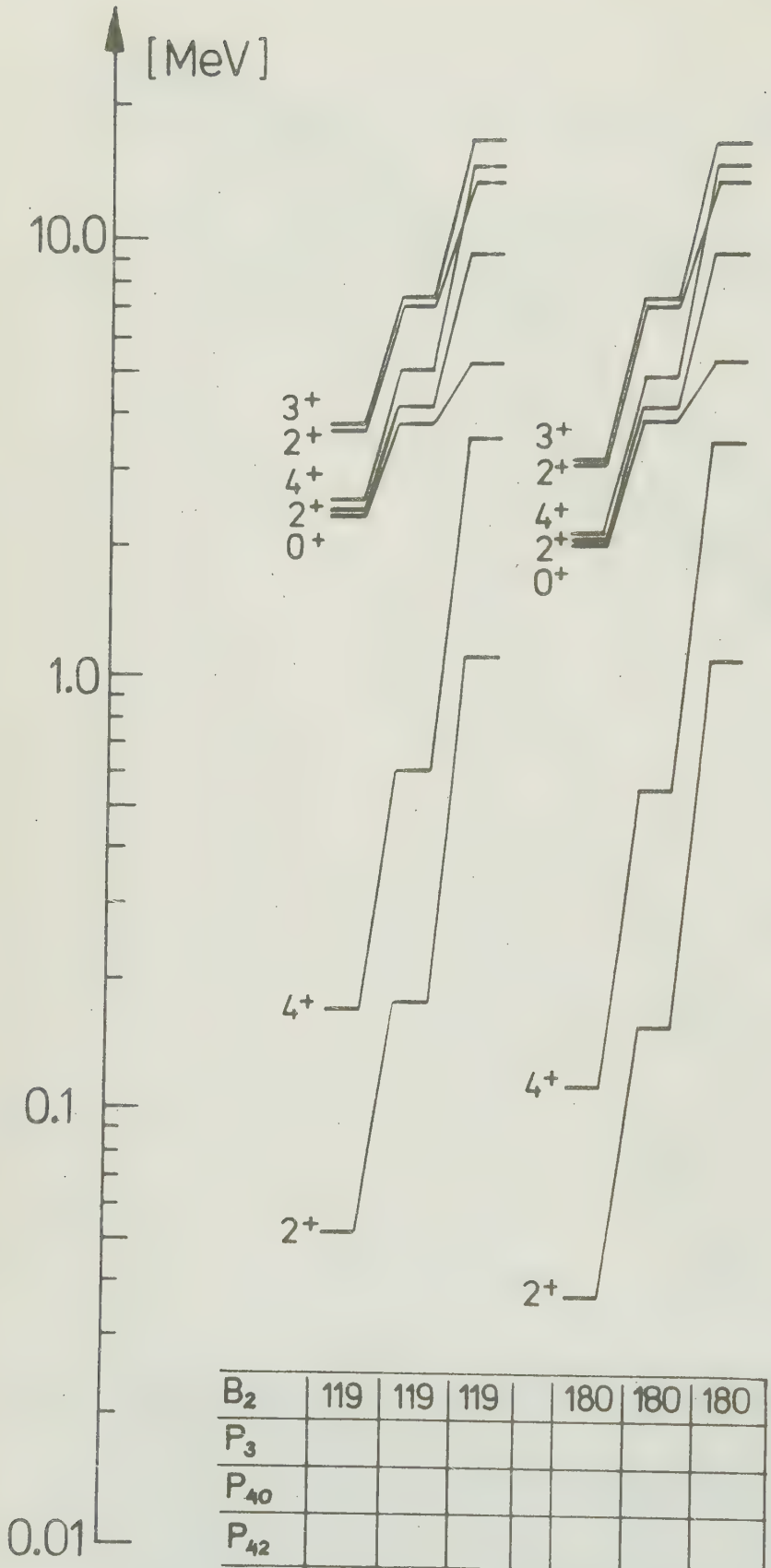
B_2	119	119	119	119	119	119	119	119	119
P_3									
P_{40}		3	3	3	-3	-3	-3	3	-3
P_{42}		3	3	-3	3	-3	3	-3	-3
P_{44}		3	-3	3	3	3	-3	-3	-3
P_5									

Fig. 16b



B_2	119	119	119	119	119	119	119	119	119	119
P_3										
P_{40}										
P_{42}										
P_{44}										
P_5		0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.5

Fig. 17a



B_2	119	119	119		180	180	180
P_3							
P_{40}							
P_{42}							
P_{44}							
P_5		0.1	1.0			0.1	1.0

Fig. 17b

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Walter Greiner danke ich für die Anregungen und Diskussionen zu dieser Arbeit.

Mein Dank gilt ferner meinem Freund Bernd Fink und den Kollegen des Institutes für Theoretische Kernphysik, insbesondere Ludwig von Bernus, Werner Scheid und Ulrich Schneider.

Meiner Frau und meinen Eltern danke ich für ihr Verständnis, das wesentlich zum erfolgreichen Abschluß dieser Arbeit beigetragen hat.

Für die Anfertigung der Figuren sei Frau Utschig und für den Druck der Arbeit sei Herrn Brose gedankt.

Den Angestellten des Zentralen Recheninstitutes der J. W. Goethe-Universität sei für ihre Unterstützung bei den umfangreichen numerischen Rechnungen gedankt.

Lebenslauf

Am 25. August 1942 wurde ich, Jens Grumann, als Sohn des Dipl.-Ing. Gerhard Grumann und seiner Ehefrau Gertrud geb. Heisters in Bremen geboren. Im Herbst 1948 wurde ich in Wiechs im Wiesental eingeschult. Ostern 1954 trat ich in das Städtische Humanistische Gymnasium in Wuppertal-Barmen ein. Von Ostern 1956 bis Herbst 1958 besuchte ich das Pädagogium in Bad Godesberg. Anschließend wechselte ich in die Kaiserin-Friedrich-Schule in Bad Homburg über und legte dort am 4. März 1963 die Reifeprüfung ab. Im April 1963 immatrikulierte ich mich für das Fach Mathematik an der J. W. Goethe-Universität in Frankfurt am Main. Nach vier Semestern wechselte ich in das Fach Physik über, fertigte unter der Leitung von Professor Dr. Walter Greiner meine Diplomarbeit an und bestand im Februar 1969 die Diplomprüfung. Ab. April 1969 begann ich ein viersemestriges Zweitstudium im Fach Betriebswirtschaft. Seit Februar 197o bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der J. W. Goethe-Universität tätig.

Im Juli 1964 heiratete ich Gudrun Steiner. Unser Sohn ist acht und unsere Tochter zwei Jahre alt.

Meine akademischen Lehrer waren: Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. F. W. Bauer, Prof. Dr. E. A. Behrens, Prof. Dr. H. Dänzer, Prof. Dr. G. Haase, Prof. Dr. R. Herzog, Prof. Dr. H. Kasten, Prof. Dr. G. Köthe, Prof. Dr. W. Martienssen, Prof. Dr. B. Mrowka, Prof. Dr. R. Moufang, Prof. Dr. A. Moxter, Prof. Dr. P. Royen, Prof. Dr. E. Schopper, Prof. Dr. F. Stummel, Prof. Dr. P. Swoboda, Prof. Dr. W. Wittmann.